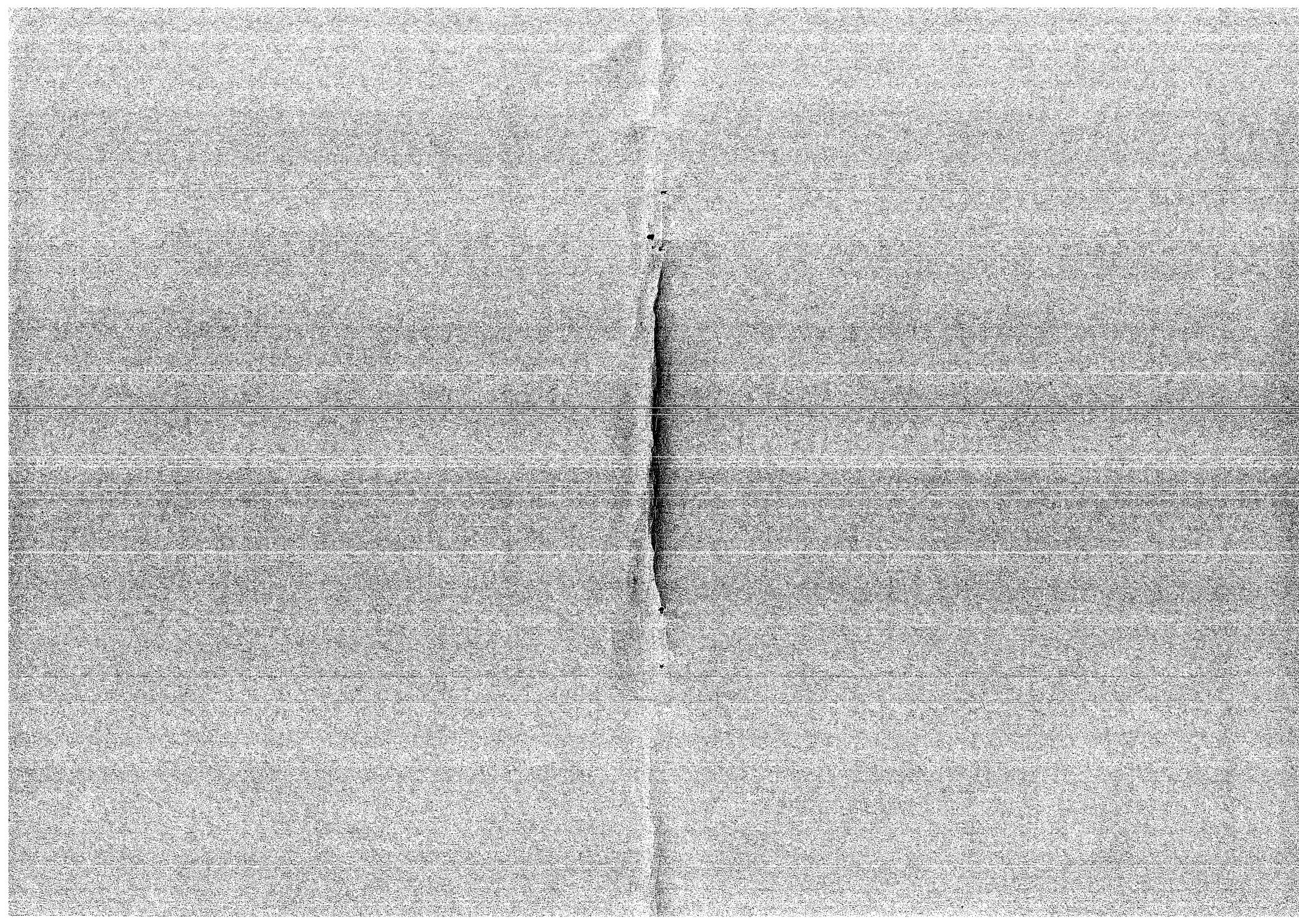


Janus

tijdschrift voor filosofie en antroposofie
jaargang 5 - nummer 2 - 1995





COLOFON

JANUS

Tijdschrift voor filosofie en antroposofie
5e jaargang, nr. 2
Verschijnt 2x per jaar

REDACTIE

Pim Blomaard
Jelle van der Schuit

REDACTIEADRES

J. van der Schuit
Lupinetuin 28
2317 MX Leiden
071 - 522 79 98

ABONNEMENTEN

een abonnement loopt per kalender-
jaar en is te verkrijgen door overma-
king van f 12,-
op gironummer 41 109 39,
ten name van J. van der Schuit, Leiden
onder vermelding van JANUS 1996

LOSSE NUMMERS

de prijs van een nummer van JANUS
in de losse verkoop bedraagt f 7,50;
er zijn nog (beperkt) oude nummers verkrijgbaar

VORMGEVING

de omslag van JANUS is ontworpen
door Anita Lennaerts

CORRECTIE

Mechteld Camman

INHOUD

JANUS, 5e jaargang, nummer 2

Ten geleide door de <i>redactie</i>	2
Mathematisme, wereldbeschouwing in het teken van de tweeling door <i>Jelle van der Schuit</i>	4
Regel vier uit: «Regels om richting te geven aan de geest» van <i>René Descartes</i>	31
De cirkel als filosofisch en mathematisch probleem door <i>Renatus Ziegler</i>	38
Mieke Mosmuller-Crull: «Zoek het licht, dat opgaat in het westen» boekbespreking door <i>Fred van der Vleuten</i>	57
Colofon	60

"Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσέρω!"
"Wie de meetkunde niet kent, hier niet binnengaan!"

Aldus luidde het opschrift boven de ingang van de Akademie van Plato. Filosofie - de zoektocht naar ware kennis - vereist volgens Plato een bekendheid met het terrein van de wiskunde. Waarom is juist wiskunde zo belangrijk, dat het gezien wordt als onontbeerlijk scholingsmiddel voor de aspirant-filosoof? Deze vraag kan slechts beantwoord worden door een bezinning omtrent de plaats die de wiskunde inneemt binnen het geheel der wetenschappen.

Dit nummer van JANUS staat vrijwel volledig in het teken van de wiskunde. Allereerst bespreekt J. van der Schuit in de serie wereldbeschouwingen het *mathematisme*, dat volgens Steiner in samenhang kan worden gezien met het dierenriembeeld van de *tweeling*. Een mathematisist is iemand voor wie de wiskunde de voornaamste toegang biedt voor het begrijpen van de wereld om hem heen. De fascinatie voor de wiskunde kan een innerlijk of een uiterlijk accent hebben. Een innerlijk gedreven mathematisist zal de kosmische betekenis van de wiskunde op waarde weten te schatten en beseffen dat het bezig zijn met wiskunde bijdraagt tot geestelijke verheffing. Dit is zeker het geval bij Plato. In onze tijd worden we veel meer geconfronteerd met de uiterlijke variant van het mathematisisme die erop gericht is om met behulp van wiskundige formules de werkelijkheid in de greep te krijgen. Natuurwetenschap en techniek zijn hier de producten van: hun bestaan is in hoge mate afhankelijk van resultaten uit de wiskunde.

De filosoof *René Descartes* kan als een exponent worden beschouwd van het mathematisme. Van alle vormen van kennis had hij het meeste vertrouwen in de wiskunde. Hij dacht dat zoiets als een universele *mathematica* mogelijk moest zijn, een wetenschap die algemener en omvattender is dan de gangbare wiskunde en die een basis vormt voor het oplossen van de problemen van maat en orde in het algemeen. In dit nummer is in vertaling een onderdeel opgenomen van een vroeg en onvoltooid gebleven werk, waarin hij deze *mathesis universalis* bepleit.

Ook voor de huidige antroposofische geesteswetenschap is de betekenis van de wiskunde nog steeds van het grootste belang. Renatus Ziegler heeft dit in zijn boek *«Geisteswissenschaft und Mathematik»* overtuigend aangetoond. Het eerste hoofdstuk van dit boek geeft aan de hand van het begrip

Overigens is het mijn persoonlijke ervaring dat ik mij in de waarneming van de wereld om mij heen kan 'verliezen'. Maar het is ook mijn ervaring is dat ik mezelf, in wat ik denk, voel of wil, weer kan terugvinden. De (filosofische) reflectie *spiegelt* mijzelf, levert een confrontatie op die anders, bijvoorbeeld in het contact met de (anonieme) buitenwereld, niet optreedt.

Filosofie, liefde voor wijsheid, het zich openstellen voor wat respectvolle verwondering een mens kan geven, dat schept de warmte die een mens in deze tijd nodig heeft. In het zelfbewuste denken kunnen we een zuiverheid en schoonheid vinden die ook aan onze kunstzinnige behoefte tegemoet komt.

Het is een lovenswaardig initiatief van Mw. Mosmuller-Crull om háár *«Filosofie van de vrijheid»* te laten verschijnen.

zijn, dat die lezer zich op zijn eigen wijze ook een nieuw perspectief verwerft.

Het begint met de filosofische verwondering en eindigt met vreugdevolle verbazing over de resultaten. Daarvoor is het nodig het denken, voelen en handelen, dat in de wereld plaatsvindt, grondig te onderzoeken. Goethe wordt geciteerd om te verduidelijken wat beoogd wordt. De kunst van het vragen wordt besproken om verder te komen: een kritische wetenschappelijke houding dient te worden eigengemaakt. De voor- en nadelen van de twijfel worden onderzocht: twijfel als gemakzucht, als intellectuele dwangmatigheid en twijfel als geduld.

Filosofie is denken en geeft aanleiding te zoeken naar de (of mijn) eerste vraag: met welke onbevooroordeelde eerste vraag vangt een fundamenteel filosofisch onderzoek aan? Kan ik zonder vooraf een keuze te maken tot die eerste vraag komen? Gaat het om de methode of de inhoud van mijn bewustzijn? Of om beide? Heb ik wel een (wetenschappelijke) behoefte aan die vraag of 'weet' ik alles al? Of moet ik juist even 'niets' weten?

Hierna kan een zekere gedachtengang opgebouwd worden. De grootste zekerheid kan een mens tegenwoordig in zijn denken vinden, in tegenstelling tot de betwijfelde buitenwereld. Wil ik wel dat denken opzoeken of onderzoeken? Kan ik die zuivere denkkracht bij mezelf waarnemen?

Hegel heeft in zijn filosofische werk hiervan getuigd. Heidegger heeft de beperking van zijn eigen denken geïllustreerd, al komt ook hij tot het uitgangspunt van menselijke zelfkennis voor de filosofie. Krishnamurti legt uit hoe men omgaat met vrijheid en meditatie en vertegenwoordigt daarmee enkele karakteristieken uit 'het oosten' (India).

De filosofische thema's die bovengenoemde filosofen behandelen vinden geheel of gedeeltelijk een antwoord in de «*Filosofie van de vrijheid*» van Rudolf Steiner. Als we het denken in voorstellingen kunnen laten opvolgen door het denken in (levende) begrippen, dan hebben we een belangrijke stap in ons leven gezet. Dan is ook een (objectieve) wetenschap mogelijk met behoud van een rijk, levendig, niet-abstract karakter. Een overwonnen scepsis wordt een twijfel die bewust gehanteerd kan worden. Een overwonnen solipsisme wordt het vermogen om met behoud van individualiteit de ander of het andere te ontmoeten.¹

¹ De term solipsisme, afgeleid van het Latijnse solus (= alleen) en ipse (= zelf), duidt de positie aan die stelt dat het ik (het zelf) alleen is. Letterlijk genomen zou dat betekenen dat er naast het ik geen anderen zijn, maar als zodanig is het nooit verdedigd. Zie verder «Woordenboek Filosofie», Harry Willemsen (red.), Assen, van Gorcum 1992.

"cirkel" een eerste karakteristiek van de wiskunde. Het is in vertaling in dit nummer opgenomen.

We hopen dat dit nummer stof biedt om de aard en de betekenis van de mathematica te leren kennen. Aan de hand van deze discipline kan men een eerste vorm van *zuiver denken* ontwikkelen, een denken dat zich weet los te maken van zintuiglijke elementen. Dan geldt de wiskunde inderdaad als voorportaal voor geesteswetenschap, een voorportaal dat leidt naar gebieden waarvoor de manende woorden van de Akademie van Plato nog steeds van kracht zijn.

de redactie

Pim Blomaard
Jelle van der Schuit

MATHEMATISME
Wereldbeschouwing in het teken van de tweeling
door *Jelle van der Schuit*

Inleiding

Onderstaande beschouwing is gewijd aan het mathematisme als één van de twaalf wereldbeschouwingen die door Rudolf Steiner zijn onderkend. We beginnen met een korte samenvatting van de inhoud.

Allereerst wordt de passage weergegeven, waarin Steiner deze fundamentele beschouwingswijze inleidt. Deze introductie wordt vervolgens nader uitgewerkt. Het mathematisme staat voor een wereldbeschouwing waarin de mathematica als de belangrijkste discipline wordt gezien voor het begrijpen van de werkelijkheid. In zijn inleiding gaat Steiner vooral in op het mechanisme, een zienswijze waarin mathematisme direct aansluit op materialisme.

De verhouding van de wiskunde ten opzichte van wetenschap in het algemeen wordt verkend. Wetenschap in het algemeen richt zich op kennisverwerving ten aanzien van een specifiek ervaringsgebied. De wetenschapper tracht aan de hand van passende begrippen zijn waarnemingen te ordenen.

De wiskunde blijkt een wetenschap te zijn waarvoor het betrokken ervaringsgebied niet via uiterlijke zintuigen gegeven is: wiskunde richt zich namelijk op een bepaalde categorie van begripsmatige samenhangen. Deze samenhangen komen innerlijk tot ervaring vanuit een denkproces. Voor de wiskundige zijn zintuiglijke waarnemingen van secundair belang: hij richt zich primair op de activiteit en de resultaten van zijn denken. Dit denken is in hoofdzaak een zuiver denken, dat wil zeggen dat de zintuiglijke dimensie er niet wezenlijk bij betrokken is.

Als produkt van het zuivere denken deelt de wiskunde in de eigenschappen ervan. Als aspecten van het zuivere denken komen achtereenvolgens aan de orde: zijn (ver)lichtend karakter; de duurzaamheid en onveranderlijkheid van zijn inhouden; de niet dwingende aard van zijn inhouden en op grond hiervan de vrije verhouding van de mens tot deze inhouden; de ervaring van innerlijke zekerheid; en tenslotte zijn logische structuur.

Met alleen een verwijzing naar het zuivere denken is de wiskunde nog niet voldoende getypeerd. Het eigene van de wiskunde blijkt vooral te bestaan uit de specifieke aard van de begrippen die zij tot object heeft. De wiskundige begrippen worden gekenmerkt door een sterk naar voren

Mieke Mosmuller-Crull, «Zoek het licht, dat opgaat in het westen»
(Occident, 1992, Den Haag, ISBN 90-75240-01-5)
Boekbespreking door *Fred van der Vleuten*

Via een filosofisch tijdschrift kreeg ik vorig jaar een folder in handen met de afbeelding van de voorkant van bovengenoemd boek. Noch de titel, noch de toelichting gaven direct uitsluitel of Mw. Mosmuller-Crull bekend was met de antroposofie. Toch waren er twee aanwijzingen dat dit het geval zou kunnen zijn: de titel en de vernieuwde oproep aan de zelfbewuste mens in de 20ste eeuw: *gnothi seauton*, ken uzelve!

De titel verwijst naar het werk van Rudolf Steiner (1861 - 1925) waarin hij in zijn spreken ingaat op "datgene wat in het westen opkomt, door het oosten bevrucht kan worden". Ik begrijp dit zo, dat bijvoorbeeld de ontwikkeling van de mens(enziel) in West-Europa een niveau van zelfbewustzijn heeft bereikt, waarbij een vruchtbare ontmoeting mogelijk is van de Griekse cultuur (Ken uzelve) met de impuls van Jezus Christus. Het resultaat kan een 'vernieuwde' mens opleveren, een mens die het (vrijwel) onbekende terrein betreedt van het zuivere denken, de menselijke vrijheid en de ware, wakkere zelfkennis.

Enerzijds is dit een gevolg van de ontwikkeling van de West-Europese (filosofische) cultuur sinds de oude Grieken, anderzijds zal elk mens, die zich hiertoe voelt aangespoord, zelf deze ontwikkelingsweg dienen te gaan, want het komt niet 'aanwaaien'.

Pas als iemand zelf in alle vrijheid besluit om de zelfkennis en het eigen denkvermogen tot grotere hoogten op te voeren, kan de hedendaagse twijfel in en over het leven worden overwonnen. We leven in een tijd waarin de wetenschap voornamelijk feitenkennis biedt en waarin het geloof geen antwoorden geeft op de brandende levensvragen. Hoe kunnen we tot verantwoorde inzichten komen die licht werpen op hedendaagse problemen?

Mw. Mosmuller-Crull poogt via een beschrijving van een door haar gegane weg een perspectief te schetsen dat vertrouwen geeft voor de toekomst. Haar gedachtengang en daarmee haar persoonlijke 'bevrijding' uit de filosofische benauwenis van deze eeuw, gaat uit van de haar eigen-gemaakte filosofische opvattingen en begrippen. Zij wil niet in abstracties vervallen en slaagt erin het boek zo te schrijven dat het tevens een doe-boek of leer-boek voor de lezer is. Indien de lezer de denkstappen en (denk)experimenten voor zichzelf nagaat en kritisch onderzoekt, kan het

beelden, maar uit eigen, bewust gestuurde kracht en volgens ijzeren wetmatigheden scheppend en vormend werkt. Op een heel elementair niveau staan wij midden in zo'n scheppende activiteit, wanneer we ons vanuit het actuele denken van het cirkelbegrip in ons innerlijk een cirkelvoorstelling opbouwen. Om de cirkelvoorstelling zelf te variëren is een sterkere fantasie-activiteit nodig. Deze zal ons bezighouden in de hoofdstukken III en V. Een verdere verhoging in niveau en intensivering van de exacte fantasie die in het wiskundige tot uitdrukking komt, kan worden geoefend aan de hand van een variatie van verschillende cirkeldefinities die door algemene wetmatigheden wordt geleid. Dit leidt ook in mathematisch opzicht tot wat minder eenvoudige gebieden en zal in de hoofdstukken VII, IX en XI uiteengezet worden.

Plato was een van de eersten die de opvoedkundige functie van de *mathematica* in zijn volle omvang begreep en als principe ten grondslag legde aan zijn academie. Hem ging het er vooral om, dat zijn leerlingen ervaringen opdeden in het mathematiseren, die hen voorbereidden voor de bewuste opname en het denkend verwerken van niet aan de wiskunde ontleende zielsmatig-geestelijke ervaringsinhouden.

tredend vormaspect. Als conceptuele discipline is de wiskunde verwant aan de logica. De logica is namelijk de wetenschap die zich met begripssamenhangen *in het algemeen* bezig houdt.

De oorsprong van de wiskunde wordt vervolgens aan de hand van geesteswetenschappelijke inzichten toegelicht. Steiner brengt als gezichtspunt naar voren dat wanneer een kind gaat "denken" en de eerste wiskundige vermogens optreden - omstreeks het zevende jaar - dit het gevolg is van een functieverandering van krachten die vóór die tijd de opbouw van het lichaam verzorgden: uiterlijk werkzame "levende" wiskunde wordt omgevormd tot innerlijk gegeven abstracte wiskunde. Maar via innerlijke scholing kan de mens deze abstracte wiskunde tot leven wekken, zodat het oorspronkelijk levend gehalte van de wiskunde tot directe ervaring wordt. Hiervoor moet een hoger kennisvermogen tot ontwikkeling worden gebracht, namelijk dat van de *inspiratie*.

Binnen het jaarverloop staat de periode van de tweeling voor de afsluiting van het voorjaar. Op 21 juni bereikt de zon haar hoogste punt, een van stralend licht vervulde tijd. De plantenwereld bereikt dan goeddeels haar nieuwe uiterlijke vorm. Het licht- en vormaspect is ook karakteristiek voor de begrippenwereld van de wiskundige.

Het beeld van de *tweeling* kan in samenhang gebracht worden met de wereldbeschouwing van het mathematisisme. De handreiking van de twee uitgebeelde personen - vaak man en vrouw - kan worden opgevat als een proces dat zich *binnenin* de mens voltrekt, namelijk als het innerlijk vinden van zichzelf, als de bewustwording van zichzelf.

In een volgend gedeelte wordt de positie van het mathematisisme in de kring der wereldbeschouwingen nader bekeken, waarbij de aandacht zich vooral richt op de verhouding met de naburige wereldbeschouwingen en de tegenoverliggende wereldbeschouwing.

De zielebeschouwingsstemming van het *transcendentalisme* (in samenhang met de planeetsfeer van *Mercurius*) blijkt goed aan te sluiten bij een uiterlijk georiënteerd mathematisisme.

Van de tien categorieën van Aristoteles ligt het vrij voor de hand om de categorie van de *hoeveelheid* (kwantiteit) in verband te brengen met het mathematisisme.

Vervolgens worden enkele voorbeelden van mathematisisme gegeven. Daarbij wordt onderscheid gemaakt tussen een uiterlijk georiënteerd mathematisisme, waarbij het accent op de toepassing van wiskunde in de wetenschap ligt, en een meer spiritueel gericht mathematisisme, waarin de wiskunde vooral gezien wordt als middel tot geestelijke verdieping. De eerste vorm is sterk verbonden met de opkomst van de natuurwetenschap en de daarbij optredende mechanisering van het wereldbeeld. Deze

ontwikkeling heeft zijn stempel gedrukt op de westerse cultuur als geheel. De filosoof Descartes kan als een treffende representant gezien worden van dit mathematisisme. Met zijn dualistische opvatting van de werkelijkheid, waarbij de *mens* als innerlijk, denkend wezen geplaatst wordt tegenover de *wereld* in haar geometrische ruimtelijkheid, brengt hij een zienswijze tot uitdrukking die tot in onze tijd doorwerkt. Een meer spirituele variant van het mathematisisme treffen we onder meer aan bij de school van Pythagoras.

We besluiten met een bespreking van de strofe die Steiner in zijn spreuk over de twaalf stemmingen aan het dierenriembeeld van de tweeling heeft gewijd.

Rudolf Steiner over het mathematisisme

Nadat Steiner eerst kruisgewijs de wereldbeschouwingen van het materialisme, spiritualisme, realisme en idealisme heeft behandeld, komen de overgangen tussen deze wereldbeschouwingen ter sprake¹: "Tussen materialisme en idealisme is een zekere overgang. Het hele grove materialisme - men kan het vooral in onze tijd goed waarnemen, hoewel het tegenwoordig al aan het afnemen is - zal hierin bestaan, dat men tot in het extreme het Kantiaanse dictum uitwerkt - Kant heeft dat zelf niet gedaan! - dat in de afzonderlijke wetenschappen slechts zoveel wetenschap is als daarin mathematica is². Dat betekent dat men van materialist tot rekenknecht van het universum kan worden door niets anders te laten gelden dan de wereld, aangevuld met materiële atomen. Ze stoten tegen elkaar, ze wervelen door elkaar, en men rekent uit hoe de atomen door elkaar heen wervelen. Daar krijgt men hele mooie resultaten uit, wat ervoor pleiten mag dat deze wereldbeschouwing volledig gerechtvaardigd is. Zo krijgt men bijvoorbeeld de trillingsgetallen voor blauw, voor rood enzovoorts; men krijgt als resultaat, dat de hele wereld een soort van mechanisch apparaat is dat men haarfijn kan berekenen. Men kan echter enigzins op een dwaalspoor raken met deze zaak. Men kan bijvoorbeeld bij zichzelf zeggen: ja, maar al heb je nog zo'n gecompliceerde machine, dan kan toch

¹ In de tweede voordracht van de in 1914 gehouden cyclus «*Der menschliche und der kosmische Gedanke*» (GA 151).

² In het voorwoord van zijn «*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*» stelt Kant namelijk: "Ik beweer echter dat in iedere bijzondere natuurkunde slechts zoveel *eigenlijke* wetenschap kan worden aangetroffen als daarin *mathematica* aan te treffen is."

fundamentele verhouding tussen zintuiglijke waarneming en wetmatigheids-wereld kan worden begrepen. Niet de zintuigen brengen ons op de hoogte van het wezen van een zaak of gebeurtenis, maar de met innerlijke activiteit te voorschijn gebrachte wetmatigheden. Wat het principieel betekent om een wetmatigheid denkend te doorzien en te verbinden met een zintuiglijke waarneming, kan juist aan de hand van elementaire meetkunde het gemakkelijkst worden ervaren. Om de wetmatigheden in hun ware *beteekenis* te vatten, moeten ze zelf *zuiver* aanschouwd worden, dat wil zeggen *gedacht* worden. Hoe men zich *deze* zuiverheid van het aanschouwen eigen maakt, kan juist de wiskunde, in het bijzonder de meetkunde ons leren. Zoals we gezien hebben en in het vervolg nog duidelijker zullen leren inzien, ervaart men juist aan meetkundige wetmatigheden en hun verschijningen hoe zich het zintuiglijke vormt vanuit het niet-zintuiglijke, hoe men zich van het zintuiglijke moet losmaken om het geestelijke in zijn ware gedaante te leren kennen, en hoe men pas aan de hand van het zo gevatte geestelijke concreet kan bestuderen, hoe het zich in het zintuiglijke manifesteert.

Zonder ervaring en oefening in de wiskunde heeft men in het gewone bewustzijn niet zulke gemakkelijk toegankelijke ervaringen ter beschikking, die borg kunnen staan voor de objectieve werkelijkheid van een niet-zintuiglijke, geestelijke wereld. Aan de hand van de mathematica kan het bestaan van niet-zintuiglijke ervaringsinhouden, die onafhankelijk zijn van het individuele bewustzijn, en daarmee het bestaan van een geestelijke wereldinhoud die op zichzelf berust, concreet worden ervaren.

Zo kan men in het bijzonder aan de hand van mathematische begrippen leren om volledig vrij en onafhankelijk van de zintuiglijke waarneming te denken, om het ook daar te kunnen, waar zo'n waarneming niet aanwezig of mogelijk is, zoals bij alle zuiver zielsmatig-geestelijke processen. Daartoe hoeft men geen wiskundige te zijn of te worden. Waarnemingen aan de hand van elementaire wetmatigheden zijn voldoende. Men moet alle mogelijke moeite doen om zich in deze wetmatigheden werkelijk *in te leven*, om daaraan concrete ervaringen op te doen. Het komt erop aan dat men in ieder geval *ervaringen* opdoet en niet blijft stilstaan bij het begrijpen en het denkend navoltrekken van mathematische samenhangen, maar met een kennende blik de mathematische activiteit zelf volgt. Hoe dat er in het bijzonder uit kan zien, zal in de volgende hoofdstukken nog uiteengezet worden.

Zo'n zich van alle concrete bepalingen van de zintuigen losmakend denken wordt ook wel aangeduid als *zuiver* of *zintuiglijkheidsvrij* denken. Het is de basis voor de *exacte fantasie*, dat wil zeggen een productieve fantasie-activiteit die zich niet verlaat op de zonder ons toedoen optredende

5. Over de betekenis van het geometriseren

De welbekende, schijnbaar eenvoudige cirkel is uitgekristalliseerd tot een vorm die met een veelheid van andere wetten in min of meer onmiddellijke samenhang staat. We hebben dit vlechtwerk van betrekkingen niet in al zijn vertakkingen uitputtend behandeld. Een gedeelte daarvan zal in volgende hoofdstukken aan bod komen. Hier zij slechts opgemerkt dat het vasthouden aan een eenmaal gewonnen definitie onvruchtbaar is. Ze stelt *één* aspect op de voorgrond en ontnemt daardoor het zicht op vele andere kanten.

Hier ligt een van de wortels voor de *abstractheid* die het denken altijd weer wordt verweten. Zij heeft haar grond in een scheiden en isoleren dat achterblijft ten opzichte van het relateren en verbinden. Deze vorm van abstractheid is een *methodische* eenzijdigheid bij het met gedachten doordringen van feiten; ze is *niet* gegrond in het blootleggen van definities als zodanig, maar in het met volharding *vasthouden* aan eenmaal gewonnen onderscheidingen en verklaringen. Hoe meer fundamenteel verschillende, scherp afgebakende definities men van een zaak kan vinden, des te beter. Uiteenlopende definities van een en dezelfde zaak of van een proces, weerspiegelen de veelheid van gezichtspunten waaronder de zaak of het proces kan worden beschouwd. Pas daardoor benadert men een echte synthese, die gegrond is in een zorgvuldige analyse en noodzakelijke differentiëringen niet vermijdt, maar ze alle weet in te bedden in een omvattende hogere samenhang.

De draagwijdte van het wiskundige denken voor het kennisleven in het algemeen bestaat onder meer hierin, dat hier ervaringen kunnen worden opgedaan, waarvan de betekenis ver uitgaat boven de wiskunde. Op de voorgrond van dit hoofdstuk stonden vooral de toepassing van de categorieën wezen en verschijning, vorm en inhoud, alsook de verhouding van definitie en wetmatigheid. Het zich bezinnen op zulke samenhangen leidt tenslotte van de wiskunde naar de filosofie - opgevat als de wetenschap van de zuivere ideeën - alsook naar zekere domeinen van een wetenschap van de geest (zie hoofdstuk X en XII). Men zal snel merken hoe onevenredig veel moeilijker het is, om op het gebied van niet-mathematische ideeën tot een helderheid en overzichtelijkheid te komen, die vergelijkbaar is met die welke men in de wiskunde heeft leren kennen. De aan de hand van de wiskunde opgedane ervaringen kunnen daarom als streng richtsnoer dienst doen voor de omgang met zintuiglijke alsook in het bijzonder met niet-zintuiglijke (zielsmatig-geestelijke) ervaringsinhouden.

De mathematische beschouwingswijze heeft vooral ook *dáárom* een centrale functie in het kennisleven van de mens, omdat met haar hulp de

nooit uit deze machine, zelfs wanneer ze zich nog zo gecompliceerd beweegt, te voorschijn komen hoe men bijvoorbeeld blauw, rood enzovoorts ervaart. Wanneer dus de hersenen nog zo'n gecompliceerde machine vormen, dan kan toch niet uit de hersenen voortkomen wat men aan zielebelevingen heeft. Maar men kan dan zeggen, zoals ooit *Du Bois-Reymond* heeft gezegd: men zal, wanneer men de wereld slechts mathematisch wil verklaren, desondanks de eenvoudigste ervaring niet kunnen verklaren; wil men echter niet stil blijven staan bij de mathematische verklaring, dan wordt men onwetenschappelijk. - De grove materialist zou zeggen: nee, ik reken ook niet; want dat gaat al uit van een bijgeloof, het bijgeloof dat ik aanneem dat de dingen naar maat en getal zijn geordend. En wie zich nu verheft boven dit grove materialisme, wordt een mathematische geest en laat slechts *dát* als werkelijk gelden wat juist in rekenformules kan worden weergegeven. Dat leidt tot een wereldbeschouwing die eigenlijk niets anders laat gelden dan de mathematische formule. Men kan haar *mathematisme* noemen."

Mathematisme in de vorm van mechanisme

Mathematisme is een wijze van beschouwen die zich bovenal laat leiden door de aard en mogelijkheden van de mathematica, de wetenschap van de wiskunde. Volgens de mathematisist vormen meetkundige en getalsmatige verhoudingen de sleutel voor het begrijpen van de wereld. Maat en getal acht hij bepalend voor de aard van de werkelijkheid. Steiner wijst erop dat we deze denkrichting vaak aantreffen in combinatie met de wereldbeschouwing van het materialisme in de vorm van het zogeheten *mechanisme*. Mechanisme is de opvatting dat de wereld volledig kan worden begrepen als een geheel van elementaire gegevens - materiedeeltjes of andere fundamentele eenheden - die zich gedragen volgens volledig mathematisch te formuleren wetmatigheden.

Steiner illustreert deze mechanistische beschouwingswijze aan de hand van het fenomeen van de kleur. Wanneer we in een donkere ruimte een straal licht door een prisma laten schijnen en vervolgens projecteren op een wit vlak, ontstaat een kleurenreeks die eruit ziet als een regenboog: een kleurenverloop van rood naar violet. De gangbare natuurkundige theorie van het licht interpreteert dit verschijnsel met behulp van golfbewegingen (trillingen). Wat we zien moeten we begrijpen als het resultaat van hele kleine en voor het oog onzichtbare golven. Maar waarin verschillen rood en violet dan? Door de "aard" van die golven. De golven van het rood "zijn" namelijk iets langer dan die van het violet. Bovendien trilt rood licht langzamer dan violet licht: er zijn per seconde minder rood-

golven dan violet-golven¹. De prisma-kleuren kunnen dus allemaal geïdentificeerd worden met een getal, namelijk met hun corresponderende golflengte of met hun trillingsgetal. De mathematicist in de vorm van mechanist kan diep tevreden zijn. Maar dekt deze interpretatie het fenomeen kleur als zodanig?

Goed beschouwd niet, want deze opvatting geeft slechts een uiterlijk houvast, maar gaat voorbij aan de *kleurbeleving*, zoals we die innerlijk ervaren. Rood is in onze beleving een andere kleur dan violet, omdat er een andere werking van uitgaat, omdat we merken dat deze kleuren een verschillende *kwaliteit* bezitten. Een mechanist zal hierop reageren door te stellen dat het hem nu eenmaal te doen is om een *objectief* beeld van de werkelijkheid en dat hij daarom de zich in het subject afspelende belevingswaarde van kleuren bewust buiten beschouwing laat. Hij beperkt zich tot wiskundig formuleerbare aspecten van de werkelijkheid, aangezien hij niet in onwetenschappelijkheid wil vervallen. Een wiskundige benadering draagt kennelijk bij tot wetenschappelijkheid.

De vraag is nu waar de mathematica deze vooraanstaande plaats in het bedrijven van wetenschap aan te danken heeft. Om deze vraag te beantwoorden, willen we eerst nagaan wat wetenschap in het algemeen is. Vervolgens kan dan worden onderzocht wat in dat kader de bijzondere positie van de wiskunde is.

Wetenschap in het algemeen

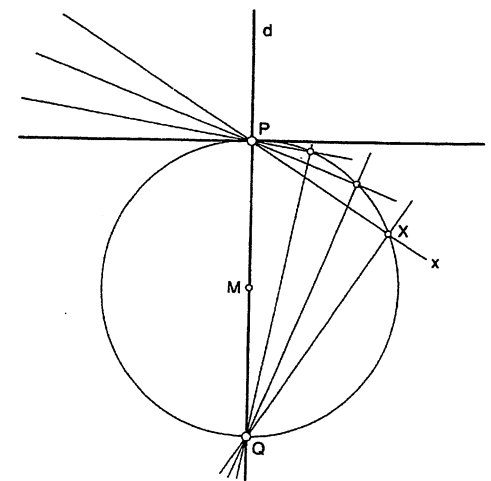
Mathematica is afgeleid van het Griekse woord *mathema*, dat in het algemeen staat voor datgene wat men leert of te weten komt, dus *lering* of *wetenschap* betekent. Deze betekenis heeft zich verder verbijzonderd tot mathematische wetenschap. Tot de mathematische wetenschappen in de klassieke zin behoren de arithmetica (getallenleer), de geometrie (meetkunde), de astronomie en de harmonieleer. Ook de herkomst van de benaming mathematica wijst ons op de bijzondere betekenis van de wiskunde binnen de wetenschap *als zodanig*.

¹ Er geldt voor rood een golflengte van 760 tot 647 nm en voor violet een golflengte van 424 tot 380 nm. Nm staat voor *nanometer*, dit is een miljardste deel (1 : 1.000.000.000) van een meter. Wat de snelheid van de trilling betreft gelden de volgende waarden: het trillingsgetal rood is ca. 440 miljoen, dat van violet ca. 730 miljoen trillingen per seconde. Naar Hazel Rossotti: «*Colour, why the world isn't grey*», Penguin Books Ltd, 1983.

De equivalentie van de definities (1) en (4) is niet zo eenvoudig te bewijzen; we komen daarop terug in paragraaf 3 van hoofdstuk IX, waar we nog een cirkeldefinitie zullen leren kennen.

Men merke op dat definitie (4), in tegenstelling tot de andere drie, niet constructief van aard is. Deze definitie geeft geen aanknopingspunten hoe een concrete cirkel feitelijk kan worden geconstrueerd. Zoals in de loop van onze beschouwingen zal blijken, is zij echter zeer nuttig om de cirkelwetmatigheid te verbinden met andere samenhangen als die van de elementaire meetkunde.

Duidelijk is, dat het niet zonder meer mogelijk is om een overzicht te verkrijgen van *alle* mogelijke cirkeldefinities. Dit lijkt het concreet vatten van de algemene cirkelwetmatigheid in de weg te staan, en als gevolg hiervan kan terechte twijfel opkomen ten aanzien van haar bestaan. Het is er echter vooralsnog alleen om te doen een specifieke cirkeldefinitie te kunnen *onderscheiden* van de algemene wetmatigheid, en niet om de algemene wetmatigheid *zonder enige relatie* met een concrete definitie te kunnen denken. Verschillende cirkeldefinities kunnen alleen daarom als equivalent worden gezien, omdat ze betrokken worden op iets dat boven hen uitgaat, namelijk de algemene cirkelwetmatigheid. Dat laat zich zonder het genoemde onderscheid niet denken.



Figuur 1.9

onafhankelijk van de ligging van X. Want volgens de stralenwet hebben we de volgende keten van verhoudingen:

$$|RA| : |AS| = |RX| : |XE| = |RX| : |XS| = q$$

en

$$|RB| : |SB| = |RX| : |FX| = |RX| : |XS| = q.$$

Daaruit volgt allereerst dat A en B punten zijn van de verdelingscirkel. Aangezien de hoek tussen de rechte AX en XB bij X altijd een rechte is en aangezien X willekeurig is, is daardoor definitie (3) te herleiden tot definitie (2). Uit figuur 1.8 leest men onmiddellijk af, dat ook het omgekeerde geldt, dat wil zeggen (2) laat zich herleiden tot (3), en daarmee zijn (2) en (3) equivalent en wegens de equivalentie van (1) en (2) ook (1) en (3).

Een karakteristieke eigenschap van cirkels is de volgende: iedere rechte door het middelpunt van een cirkel (dat betekent iedere diameter) snijdt de cirkel loodrecht. Daarmee wordt bedoeld dat iedere diameter de raaklijnen in zijn beide snijpunten met de cirkel loodrecht snijdt. Dit kan bijvoorbeeld als volgt worden ingezien. Laat P een willekeurig punt van de cirkelomtrek zijn en d de door P gaande diameter die de cirkel aan de andere zijde in Q snijdt. De raaklijn p in P wordt gedefinieerd als de grensrechte die optreedt als gevolg van snijlijn $x = PX$, waar X een punt van de cirkel is dat in de richting van P beweegt (figuur 1.9). Volgens de stelling van Thales (zie definitie (2)) staat de rechte PX voor iedere ligging van X loodrecht op de rechte QX, dus staat ook p loodrecht op d = PQ.

Er is dus bij iedere cirkel precies één lijnenwaaier, waarvan de rechten de cirkel alle loodrecht snijden. Kan dit ook omgekeerd worden, dat wil zeggen zijn cirkels juist die (gesloten en singulariteitsvrije) krommen, die alle rechten van een lijnenwaaier loodrecht snijden? Dit is inderdaad het geval:

- (4) Een cirkel is een (gesloten en singulariteitsvrije) kromme, die loodrecht staat op alle rechten van een lijnenwaaier¹.

¹ Het in deze definitie gebruikte begrip kromme is gebaseerd op eigenschappen die hier niet gedetailleerd ontwikkeld, maar in ieder geval vermeld zullen worden: een "gesloten" kromme heeft geen begin- en eindpunt, ze bestaat uit één doorgetrokken lijn. Een "singulariteitsvrije" kromme heeft geen hoekpunten, buigpunten, zelfdoorsnijdingen (dat wil zeggen dubbelpunten), meervoudige raaklijnen enzovoorts. Voor een meer exacte verklaring van deze begrippen zie L. Locher, "Freie Geometrie ebener Kurven", Basel

Wat is wetenschap in het algemeen? Een wetenschap streeft naar kennis van een bepaald gebied van de werkelijkheid. We kennen iets als we iets volledig begrepen hebben, dat wil zeggen als we de bijzondere of algemene samenhang waarin iets zich voordoet, hebben doorgrond. Wetenschap heeft dus met *begrijpen* en *begrippen* te maken. Begrippen vormen het instrumentarium van de wetenschapper voor de vorming van kennis. In het begrijpen worden bestaande begrippen geactualiseerd en zonodig nieuwe begrippen gevormd.

Een wetenschap richt zich op een bepaald ervaringsgebied en tracht haar waarnemingen in dit gebied via oordelen systematisch te ordenen. Van wetenschap is sprake als we ons een waar oordeel hebben gevormd over een waargenomen verschijnsel. Een waar oordeel houdt in dat we ons passende begrippen voor dat verschijnsel hebben eigen gemaakt. Alleen waarnemen levert nog geen kennis op. Pas door de juiste begrippen te verbinden met die waarneming ontstaat wetenschap.

Wetenschap berust dus op twee vermogens: een *waarnemingsvermogen* en een *denkvermogen*. Het waarnemen levert ons de stof voor datgene wat we willen begrijpen en berust op een ontvankelijkheid voor een bepaald gebied van de werkelijkheid. Maar het waarnemen levert ons niet de begrippen op, waarmee we kunnen begrijpen. Deze begrippen ontspringen niet aan de waarneming maar aan onze eigen denkactiviteit. Wat we in een begrip ons tegenwoordig stellen is geen zintuiglijke eenheid maar een niet-zintuiglijke eenheid van innerlijke, geestelijke aard. In tegenstelling tot de zintuiglijke gegevens waarmee we zonder meer, dat wil zeggen zonder eigen inspanning, geconfronteerd worden, is het kenmerkende van begrip-eigen dat ze berusten op een actieve inbreng van ons eigen wezen.

Nadat we ons zo een globaal beeld hebben gevormd van wetenschap in het algemeen willen we overgaan tot de behandeling van de wiskunde als bijzondere vorm van wetenschap.

Wiskunde als niet-empirische, conceptuele wetenschap

De wetenschappen laten zich op grond van hun betrokken ervaringsgebied globaal verdelen in *empirische* en *niet-empirische* wetenschappen. Uitgangspunt voor een empirische wetenschap is het materiaal dat ons via de zintuigen bereikt. Vervolgens is het dan de kunst van een natuurkundige, bioloog of welke vertegenwoordiger van een empirische discipline dan ook om het waargenomene op passende wijze met begrippen te doordringen.

De wiskunde onderscheidt zich echter fundamenteel van de empirische wetenschappen doordat haar oordeelsvorming in beginsel niet gericht is op de ons omringende werkelijkheid. De wiskunde is een voorbeeld van een

niet-empirische wetenschap. Getallen zijn zintuiglijk niet waarneembaar. Hoewel de meetkunde van nature een aanschouwelijk karakter bezit - moeten we deze aanschouwelijkheid niet gelijkstellen met de zintuiglijke waarneming. Zo komt de wiskundige cirkel in de zintuiglijke werkelijkheid als zodanig niet voor. De cirkel, opgevat als wiskundige vorm, is een wetmatigheid die kan worden *begrepen*, die als begrip onderdeel uitmaakt van de denkwereld van de wiskundigen. De aandacht van de wiskundige richt zich niet op de wereld *buiten* hem, maar op een wereld *in* hem zelf, de wereld die hij tegemoet treedt in zijn denken.

In hoeverre voldoet wiskunde aan de algemene idee van wetenschap? Wetenschap tracht het waargenomene via begrippen tot eenheid te brengen. Hoe moeten we in geval van de wiskunde het waarnemen opvatten als er geen sprake is van zintuiglijke waarneming? Waar bestaat de wiskundige waarneming uit? We kunnen het begrip waarnemen in een meer algemene zin verstaan, namelijk als een vorm van ontvankelijkheid voor een zich aandienende werkelijkheid. Dat kan betrekking hebben op de zintuiglijke ontvankelijkheid, voor datgene wat zich afspeelt in de empirische werkelijkheid, maar het kan ook slaan op de ontvankelijkheid voor datgene wat zich voordoet binnen het denken. Wat de wiskundige ervaart is geen empirische werkelijkheid, maar een niet-empirische, geestelijke werkelijkheid die hij ervaart in het denken. Hij beweegt zich in een wereld van begrippen, zoals die van getallen en meetkundige vormen en ontdekt binnen die werkelijkheid allerlei samenhangen. De wiskunde is een vorm van wetenschap die zich volledig richt op een *begripsmatige, conceptuele werkelijkheid*. Een wiskundig oordeel berust niet op empirische samenhangen, maar louter en alleen op samenhangen van begrippen.

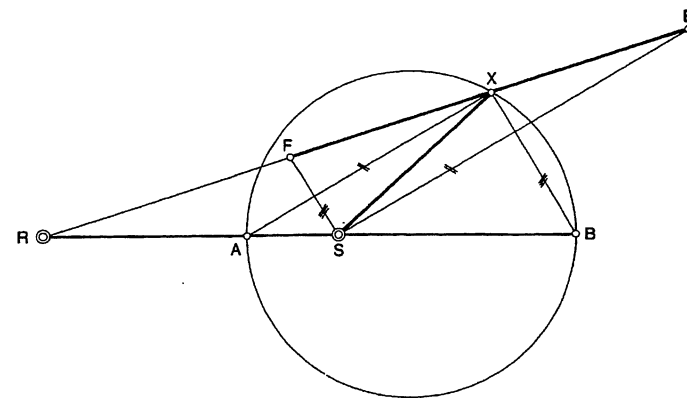
De aandacht van de wiskundige richt zich dus op de produkten van het denken zelf. De wiskundige aanschouwt de voortbrengselen van zijn eigen denken. Wiskunde blijkt te zijn gebaseerd op de mogelijkheid van de mens om zich in zijn denken tot zichzelf te verhouden. Het denken van de wiskundige voltrekt zich in zichzelf. Het is een *zuiver denken*, omdat er geen elementen bij betrokken zijn die vreemd zijn aan het denken, zoals in geval van een empirische wetenschap en het daarbij betrokken zintuiglijke materiaal.

Verdere karakterisering van de wiskunde

Globaal is de positie aangegeven van de wiskunde als wetenschappelijke discipline, maar we willen dit kennisgebied nog nader karakteriseren.

Deze meetkundige plaats heet ook wel *verdelingscirkel*. Voordat we bewijzen dat definitie (3) equivalent is met de vroegere definities, willen we nagaan, hoe we de punten van deze meetkundige plaats concreet kunnen construeren. Daartoe gebruiken we een hulpconstructie, die ons paren van afstanden levert met een constant quotient. Voor de constructie van de punten van de cirkel die het lijnstuk RS in punt A snijdt (figuur 1.7b), kan men als volgt te werk gaan: men construeert twee parallelle rechten met afstand $|RS|$ en brenge het punt A over op een loodlijn van deze rechten (figuur 1.7a). De *stralenwet* van de elementaire meetkunde zegt, dat alle rechten door één punt door twee parallelle rechten (die dit punt niet bevatten) in lijnstukken verdeeld worden, waarvan de lengtes dezelfde verhouding tot elkaar bezitten. Daaruit volgt dat alle rechten door punt A door de beide parallellen in stukken verdeeld worden, die zich allemaal verhouden als $|RA| : |SA|$.

Met deze constructie kunnen willekeurig veel punten van de verdelingscirkel worden gevonden (zie figuur 1.7b).

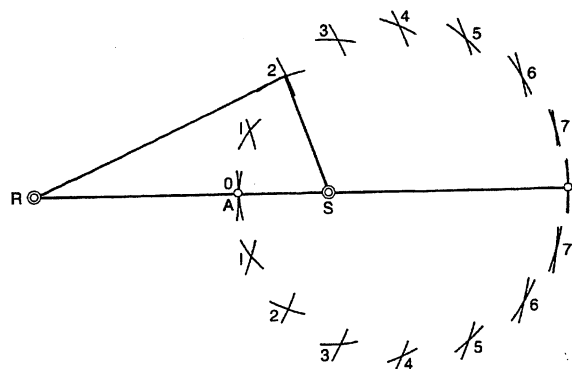
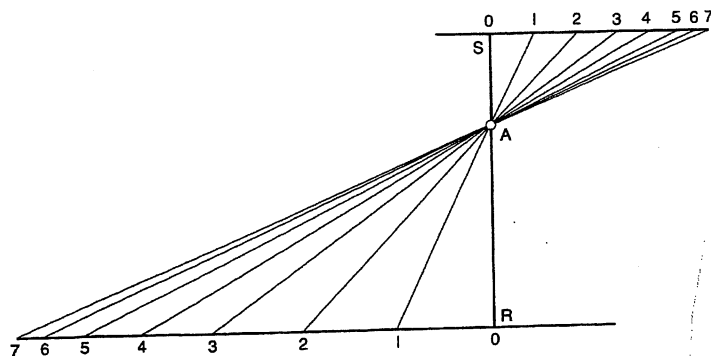


Figuur 1.8

Deze cirkeldefinitie kan worden herleid tot een van onze eerdere definities. Daarvoor gebruiken we figuur 1.8. Volgens het vooraangaande geldt $|RX| : |SX| = q$. Men kiese nu twee punten F en E op de rechte RX, zodanig dat $|SX| = |FX| = |EX|$. Nu construeer men de bissectrices van de rechten RX en SX in X. Ze staan loodrecht op elkaar en delen de lijn RS inwendig in A en daarbuiten in B in dezelfde verhouding,

hun afstanden tot R en S eveneens gelijk is aan q, liggen samen met X op een cirkel (figuur 1.6). Dus:

- (3) Een cirkel is de meetkundige plaats van alle punten, waarvan de afstanden tot twee vaste punten een constant quotient hebben.



Figuur 1.7a en 1.7b

Wiskunde berust op een zuiver denken en deelt daarom in de eigenschappen van dit zuivere denken. We richten ons daarom eerst op kenmerken van het zuivere denken.

Het zuivere denken kan worden ervaren als een *lichtend* fenomeen. De fundamentele eigenschap van licht is dat het dingen zichtbaar maakt. Dat geldt voor het zonlicht in verhouding tot de materiële werkelijkheid, maar dat geldt ook voor het denken dat tot kennis en inzicht leidt. Dit lichtaspect van het denken is door vele filosofen verwoord. Dit aspect kenmerkt het zuivere denken in het algemeen, en betreft dus niet alleen het wiskundige denken. Wel leent de wiskunde zich bij uitstek om deze ervaring op te doen. Door wiskundige entiteiten in hun samenhang te doordenken laat de wiskundige zijn licht stralen in zijn innerlijk. Hoe meer hij daarin slaagt, des te meer wordt zijn denken gekenmerkt door heldere, duidelijke, doorzichtige inhouden.

De inhouden van het zuivere denken doen zich voor als *vaste, duurzame, onveranderlijke* gegevens. Dit valt weer aan de hand van de wiskunde goed te demonstreren. Het begrip cirkel is een meetkundige samenhang die aan geen enkele verandering onderhevig is. Hij doet zich voor als onwrikbaar, *objectief* gegeven. Onze kennis over cirkels kan allengs groeien, maar dat tast de aard van de cirkel als zodanig niet aan. Op de innerlijke gesteldheid van een cirkel kan de mens geen enkele invloed uitoefenen: deze is en blijft wat hij is en vormt een *onafhankelijk* gegeven. Het is juist deze onafhankelijkheid die het objectief gehalte uitmaakt van zo'n inhoud. Wel is het zo dat de mens de gelegenheid moet geven aan de betreffende inhoud om in zijn denken tot verschijning te komen. Dat is weliswaar een actieve bijdrage van de mens, maar moet niet worden opgevat als een volledig op zichzelf staande scheppingsdaad. De mens is hierin slechts gelegenheidsoorzaak en geen werkoorzaak. De mogelijke elementen van het denken zijn *universeel*, dat wil zeggen dat iedere denker in de gelegenheid is om over deze inhouden in volkomen identieke zin te beschikken. Dat doet hij dan door zich er actief mee te verbinden. Hij maakt aldus zichzelf eigen wat als potentieel gegeven voor iedereen beschikbaar is. Niemand heeft het alleenrecht op het begrip cirkel, en de betreffende inhoud is voor iedereen gelijk.

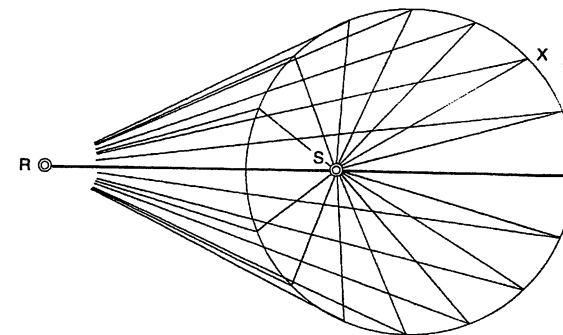
Omgekeerd oefenen potentiële begrippen uit zichzelf geen werking uit op de mens. Het mogelijke begrip cirkel verplicht niemand om als zodanig begrepen te worden. Weliswaar kan er sprake zijn van een aanleiding in de zintuiglijke waarneming, bijvoorbeeld als we naar de volle maan kijken, maar dat betekent geenszins dat dit *dwingt* tot het begrip cirkel. Als een mens van zins is om de wereld te begrijpen, dan zal het voor de hand liggen om het begrip cirkel tot ontwikkeling te brengen, maar het door-

slaggevende initiatief berust uiteindelijk bij de mens zelf. Potentiële begrippen laten de mens vrij. Wel is het zo dat wanneer iemand zich in principe met een begrip verbindt - anders gezegd: zich een begrip vormt - hij vanaf dat moment de innerlijke noodzakelijkheid ervan ervaart en daarin meegaat zolang hij het begrip actief wil handhaven in zijn denken. Hij hoeft niet bepaalde begrippen te denken, maar indien hij zich ontvankelijk toont voor bepaalde begrippen, dan is hij ook gehouden aan de gelding van de ermee verbonden samenhangen.

De *vrije* verhouding van de mens ten opzichte van inhoud van zijn denken laat zich goed illustreren vanuit de geschiedenis van de getallenleer. Zonder uitvoerig in te gaan op de ontwikkeling van de getalsoorten, kan het volgende worden gesignaleerd. Vanuit wiskundige bewerkingen leveren omgekeerde bewerkingen in de regel problemen op. Gaan we uit van de natuurlijke getallen (de telgetallen) dan kan bij het aftrekken (als omgekeerde bewerking van het optellen) een verlegenheidssituatie ontstaan: $7 - 3$ levert een keurig antwoord, namelijk 4, maar wat te doen met $3 - 7$? Zoals bekend zijn daarvoor de *negatieve getallen* uitgevonden, maar dat we in het denken daarmee akkoord zijn gegaan is allerm minst vanzelfsprekend. Tot in de 19^e eeuw is er ernstige twijfel geweest of dat soort getallen wel bestaansrecht hebben! Ondertussen zijn de negatieve getallen volledig ingeburgerd en ervaart ieder ontwikkeld mens ze als een "natuurlijke" uitbreiding, maar die natuurlijkheid moet uiteindelijk toch eerst gesanctioneerd worden door de denker zelf. Dat dit resulteert in een algemene culturele verworvenheid doet daar niets aan af. Een soortgelijk voorbeeld treedt ook op bij het machtsverheffen. Omdat dit een asymmetrische bewerking betreft - 2^3 is wat anders dan 3^2 - zijn er twee omgekeerde bewerkingen mogelijk: enerzijds het bepalen van de logaritme, anderzijds het worteltrekken. We beperken ons hier tot de problemen die optreden bij de laatste bewerking. De vierkantswortel uit 9 is 3 (immers $3^2 = 9$), maar wat is de vierkantswortel uit -1? Lange tijd gold dit probleem als onoplosbaar, zo'n getal bestond eenvoudig niet, althans niet binnen de reeds bestaande getalsoorten. Ook hier moest eerst een individuele denker het initiatief nemen tot een uitbreiding van de bestaande getallen. Dat resulteerde in de *complexe getallen*, en wel door de aanname dat de vierkantswortel uit -1 gelijk is aan 'i'. Dit "aannemen" moet worden opgevat als een meegaan in begripsmatige mogelijkheden, zonder dat dit meegaan als verplichting moet worden opgevat. Zij berust op een vrije optie van de denker. Dat de resultaten van een dergelijke aanname tot een tot dusver ongekend en uitgebreid getallenrijk voert met zeer vruchtbare samenhangen, betekent niet dat het zonder meer noodzakelijk was om deze stap te zetten. De aantrekkelijkheid van deze keuze vanwege zijn vruchtbare

den. Definities zijn uitdrukking van een bepaalde *keuze* van deelwetmatigheden die met elkaar in relatie en in de definitie naar voren gebracht worden. Aangezien nooit alle relaties in één *definitie* kunnen worden gestopt, valt enigszins gechargeerd op te merken: wat een wetmatigheid inhoudt, is niet in één definitie uit te drukken.

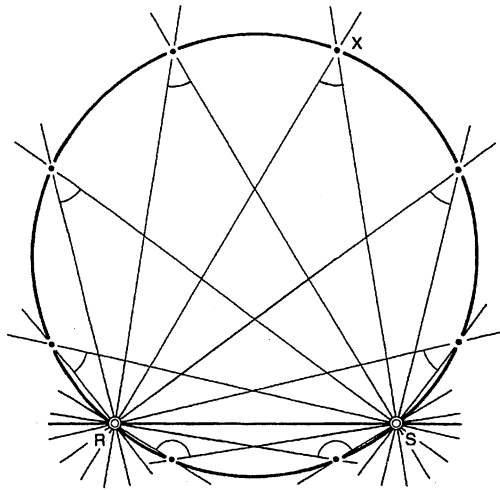
Definitie (2) laat zich generaliseren, allereerst nog vanuit het gezichtspunt van de constante hoek. Laten we namelijk geen loodlijnen vanuit R neer op de rechten van de lijnenwaaier door S, maar rechten die de rechten door S onder een willekeurige, maar vaste hoek snijden, dan liggen de corresponderende voetpunten ook op een cirkel (figuur 1.5). Dit is een illustratie van de zogenaamde *stelling van de omtrekshoeken*, waarvan het bewijs in ieder leerboek van elementaire meetkunde kan worden gevonden. Daarbij kan worden opgemerkt: de omtrekshoeken in de beide door R en S bepaalde cirkelsegmenten verhouden zich complementair, dat wil zeggen dat hun som steeds 180 graden bedraagt.



Figuur 1.6

Ter illustratie en verruiming van onze gezichtspunten zal nog een andere constructieve cirkeldefinitie worden behandeld, afkomstig van Appolonius. We bekijken daartoe twee vaste punten R en S in een vlak. Een niet met R of S samenvallend punt X van dit vlak heeft de afstand $r = |RX|$ en $s = |SX|$ tot respectievelijk punt R en S. Het quotient van r en s zij q genoemd; dus $q = r:s$. Alle punten van het vlak, waarvoor het quotient van

Onder de *wetmatigheid* van de cirkel als zodanig verstaan we dientengevolge de samenhang of de structurele eenheid (niet de som) van alle aan de cirkel te onderscheiden gezichtspunten of eigenschappen (deelwetmatigheden). Door *één* definitie kan een wetmatigheid niet in haar totale wezen worden begrepen. Daarvoor zijn meerdere gezichtspunten noodzakelijk. Iedere definitie moet noodgedwongen aan *één* gezichtspunt vasthouden en is in deze zin altijd eenzijdig. Het kan natuurlijk niet zo zijn, dat men daarom van definities afziet - integendeel, hoe meer definities opgesteld worden, des te dichter benadert men het omvattende wezen van de beschouwde zaak.



Figuur 1.5

Om het taalgebruik te vereenvoudigen zullen we, zoals tot nu toe steeds het geval is geweest, niet altijd een streng onderscheid maken tussen een specifieke definitie en de omvattende wetmatigheid. Uit de samenhang zal duidelijk zijn wat er wordt bedoeld. We willen er nog op wijzen, dat definities ook kunnen worden opgevat als verschijningen van wetmatighe-

resultaten is niet een dwingende *werking* vóóraf maar eerder een constatering áchteraf. Kiest men voor de betreffende aanname dan oogst men in begripsmatig handhaven en doordenken van deze keuze de nieuwe samenhangen.

Deze begripsmatige vrijheid legt de nadruk op het *actieve karakter* van het zuivere denken. De mens kan pas begrijpen, omdat hij zichzelf actief heeft verbonden met begrippen. Begrip ontstaat op grond van en in de mate van eigen denkactiviteit. Deze activiteit ontspringt aan het *ik*, de individuele geestelijke wezenskern van de mens. Met deze actieve grondslag voor het zuivere denken hangt het aspect samen van te ervaren *innerlijke zekerheid*. Dit zekerheidsaspect is weer goed te beleven aan de hand van een wiskundige samenhang. Neem bijvoorbeeld de volgende berekening: $10 - 7 = 3$. Door ons met deze getallen in hun aangegeven samenhang te verbinden kunnen we de juistheid ervan *innerlijk actief* nagaan. We beheersen deze begripsmatige samenhang volkomen. In ons denken kunnen we inderdaad heer en meester zijn en daarom ervaren we daar een soevereine zekerheid. We hebben de begrippen zelf in de hand en het is onze eigen activiteit die de begripsmatige samenhangen bewerkstelligt. Wat ons vaak onzeker kan maken zijn factoren die we zelf niet in de hand hebben, maar waar we machteloos aan zijn overgeleverd.

Een volgend karakteristiek element van het zuivere denken is zijn *logisch karakter*. Daarmee bedoelen we het structurele fenomeen dat een aantal eenvoudige samenhangen een veelheid van hogere samenhangen met zich mee brengt. In de wiskunde is deze structuur zeer duidelijk aanwezig. In zijn *«Elementen»* heeft Euclides voor het eerst de logische opbouw van de meetkunde expliciet gemaakt. Eenvoudige, direct inzichtelijke meetkundige samenhangen legde hij vast in axioma's en postulaten. Vervolgens leidde hij hieruit hogere samenhangen af en formuleerde die in theorema's (stellingen). Wiskunde is een bewijzende, demonstratieve, deductieve wetenschap. Het bewijzen komt neer op het laten zien (demonstreren) dat een hogere samenhang een gevolg is van een aantal lagere reeds bekende samenhangen. De hogere samenhang wordt afgeleid (gededuceerd) uit elementaire samenhangen. Zo kan als hogere samenhang worden afgeleid dat de drie hoeken van een driehoek samen een rechte hoek vormen.

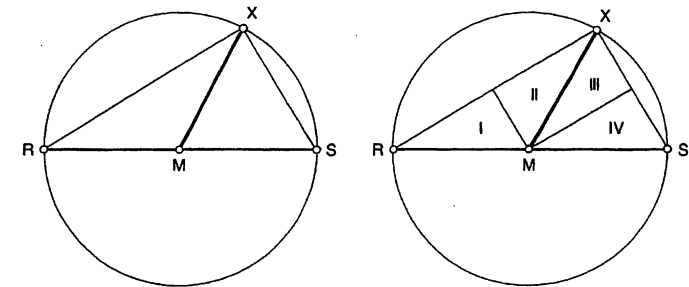
Het direct kunnen inzien van axioma's - ze worden vaak *evident* genoemd - staat dus tegenover het indirecte inzicht van stellingen. Indirect omdat de geldigheid ervan niet zonneklaar is, maar pas bij nadere beschouwing aan het licht treedt, desnoods vanuit een aaneenschakeling van vele denkbewegingen die elk op zich inzichtelijk en daardoor aanvaardbaar zijn. Het begrijpen van stellingen, dat wil zeggen het inzien van hun geldigheid, vergt dus denkactiviteit. Toch is het een bekend fenomeen dat

iemand die eenmaal thuis is geraakt in een bepaalde hoek van de wiskunde bepaalde daarbij betrokken stellingen als evident gaat ervaren. De actualisatie van waar het in een bepaalde stelling om te doen is, voltrekt zich voor zijn geestesoog zo snel dat de betreffende denkinhoud 'direct' inzichtelijk is, terwijl anderen daar nog voor moeten zwoegen.

De vraag kan gesteld worden wat de eigenlijke oorsprong is van het verschil tussen het inzien van de geldigheid van axioma's en theorema's. Het evidente karakter van axioma's zou tot het misverstand kunnen leiden dat voor axioma's géén moeite hoeft te worden gedaan. Het lijkt mij in dit verband beter om van *minder* benodigde activiteit te spreken dan die welke is vereist voor het inzien van de juistheid van stellingen. Minder activiteit ook daarom, omdat stellingen hogere samenhangen behelzen en dus omvattender en veeleisender zijn dan axioma's. Het logische vermogen, het kunnen combineren van verschillende denkstappen, houdt dus verband met een traagheidsfactor in het denken, omdat de mens in het zich verweren van samenhangen telkens een pas op de plaats moet maken en dan daarbij het gevaar loopt eerder ingeziene samenhangen onderwijl kwijt te raken. Van belang is om in te zien dat het benodigde inzicht van een denkstap in het kader van een redenering geen andere kwaliteit heeft dan het inzicht van een elementaire samenhang: logica berust uiteindelijk *evenzeer* op evidentie, het direct inzien van de juistheid van een samenhang. Er zijn geen verschillende soorten inzichten: die van axioma's en die van redeneerstappen. Er is maar één vorm van inzicht en evidentie, namelijk die welke voortkomt uit het actieve denken.

Tot dusver zijn aspecten van de wiskunde aan de orde gesteld die weliswaar eigen zijn aan de wiskunde, maar niet specifiek zijn voor de wiskunde. Als produkt van het zuivere denken deelt wiskunde in de eigenschappen van het zuiver denken. Maar het zuivere denken moet niet worden gelijkgesteld met het wiskundig denken, noch met het mathematische als zodanig: het is veel omvattender. De vraag is dan ook waarin het wiskundige denken zich onderscheidt van het zuivere denken in het algemeen. Dit gevraagde onderscheid moet gezocht worden in de aard van het gedachtengoed dat bij de wiskunde hoort. Meetkunde houdt zich bezig met ruimtelijke figuren, algebra met getalsmatige betrekkingen. Het zijn begrippen die zich vooral lenen voor het beschrijven van *uiterlijke vormen en verhoudingen*. Meetkunde richt zich op de samenhang van ruimtelijke vormen. Die figuren kunnen we aanschouwen. We zien bijvoorbeeld een cirkel, maar we zien niet op wat voor samenhang die cirkel berust: dat leert ons de meetkunde. Getallen zijn op zich onzichtbaar. Wat we van getallen begrijpen speelt zich *primair* af binnen het denken. In dat opzicht is algebra abstracter: ze staat verder af van wereld die we zien. Wel is het zo

waaruit volgt dat $|MX| = |RM| = |MS|$. Daardoor hebben we (2) uit (1) afgeleid (bewezen) of, zoals men zegt, (2) herleid tot (1). Dit betekent dat iedere cirkel in de zin van definitie (2) ook een cirkel is in de zin van definitie (1).

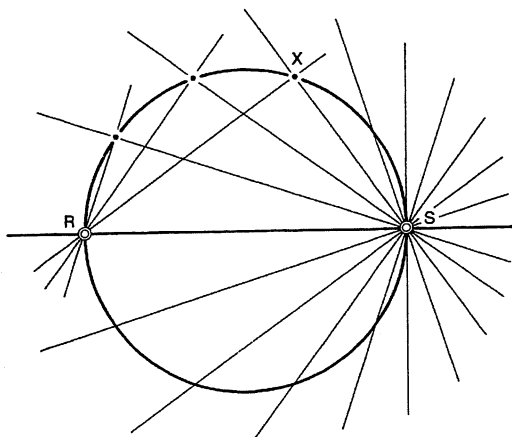


Figuur 1.3 en 1.4

Omgekeerd is echter ook (1) te herleiden tot (2), dat wil zeggen dat men (2) als oorspronkelijke cirkeldefinitie kan nemen en daaruit (1) kan afleiden. Ook dit laat zich onmiddellijk uit figuur 1.4 aflezen.

Daaruit volgt dat iedere meetkundige plaats, die de eigenschappen van (1) heeft, ook de eigenschappen van (2) heeft en omgekeerd. Men zegt nu dat de definities (1) en (2) dezelfde *omvang* hebben, ze zijn *equivalent*. En toch gaat het om twee heel verschillende structurele samenhangen die door het erbij betrekken van andere wetmatigheden (hier: congruentie van driehoeken) aan elkaar gekoppeld kunnen worden. Specifieke definities van de cirkel zijn dus uitdrukking van deelwetmatigheden van de alomvattende wetmatigheid van de cirkel, die de verschijningen van de cirkel volledig bepalen; ze brengen zekere aspecten naar voren vanuit een welbepaald gezichtspunt. Bij (1) is dit gezichtspunt de constante afstandsrelatie tot het middelpunt en bij (2) de constante hoekrelatie. Wat voor gezichtspunten er in het algemeen mogelijk zijn, is alleen bepaald door de algemene cirkelwetmatigheid.

- (2) De cirkel is de meetkundige plaats van alle voetpunten van de loodlijnen uit een willekeurig punt op de rechten van een lijnen-waaier.



Figuur 1.2

Deze verklaring van de cirkel gaat terug op Thales van Milete. Ze heet daarom ook wel de *stelling van Thales*.

De eerder gegeven definitie (1) van de cirkel onderscheidt zich wezenlijk van (2). Daarom vereist de stelling (2) een bewijs, dat wil zeggen een expliciete demonstratie van de samenhang tussen de definities (1) en (2) door middel van andere wetmatigheden zoals driehoek, congruentie enzovoorts. Voor dit doel bekijken we figuur 1.3. Wanneer we kunnen aantonen dat er een punt M bestaat, tot waar alle punten X dezelfde afstand hebben, dan is het bewijs geleverd. Zoals men gemakkelijk inziet, zijn R en S zelf punten van de meetkundige plaats van alle voetpunten van de loodlijnen, dus moet M, in geval zo'n punt bestaat, in het midden van lijnstuk $|RS|$ liggen. Er moet nu nog worden aangetoond dat lengte $|MX|$ gelijk is aan lengte $|RM| = |MS|$. Trekken we de loodlijnen vanuit M op RX en SX (figuur 1.4), dan laat zich op verschillende wijzen aflezen dat de driehoeken I, II, III en IV alle onderling congruent zijn,

dat getallen kunnen worden uitgebeeld met behulp van meetkundige entiteiten: de reële getallen kunnen worden weergegeven als lijn, de complexe getallen als vlak. Deze mogelijke uitbeelding moet echter niet verward worden met de getallen zelf, want zij zijn louter het produkt van het denken, evenzeer als de samenhang van de cirkel dat is. Wiskundige begrippen zijn bepalend voor uiterlijke hoedanigheden en benadrukken het aspect van de zuivere vorm van werkelijkheid. Vanuit dit oogpunt is het te begrijpen dat wiskunde zo'n belangrijk instrument is voor de natuurwetenschap in het bepalen van de *vorm* van de uiterlijke werkelijkheid.

Andere vormen van conceptuele wetenschap

Wiskunde is niet de enige wetenschap die voortkomt uit het zuivere denken. Ook de *logica* hoort hier thuis, omdat zij zich als discipline bij uitstek bezighoudt met de ontwikkeling en handhaving van een conceptueel systeem. Eerder zagen we dan ook dat de wiskunde een logisch karakter draagt. Logica is de algemene wetenschap die zich toelegt op het vasthouden en doordenken van begripssamenhangen. Wiskunde kan eigenlijk opgevat worden als een bijzonder geval van logica, namelijk logica die geënt is op wiskundige begrippen, d.w.z. begrippen die staan voor uiterlijke en vaste vormkenmerken.

De traditionele logica richt zich op algemene begrippen. Zo is het de propositielogica te doen om begripssamenhangen rond het begrip 'oordeel' en de predikatenlogica om begripssamenhangen rond de begrippen 'oordeel', 'ding' en 'eigenschap'. Het is te verdedigen dat logica haar rechtvaardiging altijd ontleent aan geestelijk waargenomen begripshouden en begripssamenhangen. Vanuit een dergelijke *inhoudelijke* oriëntatie kan er voor worden gepleit dat logica is uit te breiden in de richting van een *algemene categorieënleer*. Het kan als een taak van de filosofie worden opgevat om aan zo'n algemene ideeënleer vorm en inhoud te geven. De huidige opvatting van logica als *formele* discipline vormt een ernstig obstakel voor een dergelijke ontplooiing. Zij komt voort uit een denkwijze die haar fundament zoekt in uiterlijke waarneembare vormen in plaats van in innerlijke beleefbare inhouden.

Geesteswetenschappelijke achtergrond van de wiskunde

Ter verdere verdieping willen we kort ingaan op de oorsprong van de wiskunde vanuit geesteswetenschappelijke gezichtspunten. We baseren ons daarbij op de door Steiner in september/oktober 1920 gehouden voordrachtencyclus «*Grenzen der Naturerkenntnis und ihre Überwindung*» (GA

322).¹ Hierin beschrijft Steiner dat omstreeks de periode van de tandenwisseling - dat is ongeveer rond het zevende levensjaar - in de bewustzijnsontwikkeling van het kind een eerste vorm optreedt van het mathematische vermogen. Voor die tijd zijn binnen de menselijke organisatie echter ook al krachten werkzaam geweest die als mathematisch te kwalificeren zijn. Vanaf de geboorte, ja zelfs al vanaf de bevruchting is er sprake van een latente, niet bewuste mathematische werkzaamheid binnen de lichaamsorganisatie. De eerste levensperiode van de mens staat vooral in het teken van de opbouw van het fysieke lichaam. De daarvoor verantwoordelijke levenskrachten zijn vervuld van mathematica, en wel van een *levende mathematica*, een mathematica die dynamisch van aard is en scheppende kwaliteiten bezit. Steiner zegt hierover in de derde voordracht: "We leren inzien dat het zielevermogen dat we na de tandenwisseling als mens toepassen, voor die tijd organiserend in ons werkzaam is. In het kind is inderdaad tot ongeveer het zevende jaar een innerlijke mathematica aanwezig, een innerlijke mathematica die niet zo abstract is al onze uiterlijke, maar die vervuld is van kracht, die, als ik een uitdrukking van Plato mag gebruiken, niet alleen kan worden aanschouwd, maar die levend werkzaam is. Tot ongeveer dat tijdstip bestaat er in ons iets dat mathematiseert, dat ons innerlijk door en door mathematiseert."

Deze creatieve wiskunde hangt nauw samen met een drietal zintuigen die in die periode juist tot ontwikkeling komen.² Het zijn de *levenszin* - een zintuig dat ervoor zorgt dat we ons zelf kunnen beleven als geheel, bijvoorbeeld in de vorm van welbevinden of onbehagen, de *bewegingszin* - een zintuig, waarmee de eigen bewegingen innerlijk kunnen worden waargenomen; en tenslotte de *evenwichtszin* - het zintuig dat ons erbij helpt om ons in harmonie te brengen met de krachten in de ruimte om ons heen. Denken we aan een klein kind dat zich met zijn hele lichaam moet leren oriënteren in de ruimte dan is het niet moeilijk om de realiteit van deze zintuigen in die eerste levensfase te kunnen plaatsen.

¹ R. van Romunde heeft een vrije weergave van deze cyclus in het Nederlands verzorgd, die in 1992 is verschenen onder de titel «*Grenzen van natuurwetenschappelijk inzicht: de scholingsweg die tot het doorbreken van die grenzen voert*», uitgegeven door het Louis Bolk Instituut te Driebergen.

² Deze zintuigen maken deel uit van een zintuigleer die meer zintuigen onderkent dan de traditionele zintuigleer. Steiner onderscheidt in andere voordrachten in totaal twaalf zintuigen.

kennisoordeel, dan houden we ons hier in eerste linie bezig met het proces van *begripsvorming*. Het ligt in de natuur van de begrippen dat hun bepalingen alleen door het denken kunnen worden gevonden en niet uit de waarneming kunnen worden geput. In die hoedanigheid doen de voorliggende onderzoeken dienst als de methodische *voorbereiding* van de kennis. Voor een gedifferentieerd kennisleven is een vertrouwd zijn met de nuances van het denken een noodzakelijke voorwaarde; zonder een precies inzicht in de natuur van de begrippen en het denkproces, alsook van het door het denken geleide voorstellen, is een bezonnen toepassing van begrippen op waarnemingen niet mogelijk. Voordat een begrip in zijn betrekking op de werkelijkheid op geldige wijze kan worden onderzocht, moet het als zodanig in al zijn noodzakelijke bijzonderheden voor het individuele denkbewustzijn staan. Tenslotte gaat het in dit onderzoek om het stimuleren van vaardigheden, die aan *iedere* vorm van kennen een solide basis kunnen geven.

Zoals Plato al heeft geweten, is de intensieve bemoeienis met de processen van het denken, in het bijzonder van het mathematische denken, niet een louter formele aangelegenheid. Het gaat hier om een *kennend* actief zijn in het gebied van het denken zelf. Bij nauwkeuriger bestudering ontsluiten zich daarbij nieuwe ervaringsbronnen, die toegang geven tot niet-zintuiglijke gebieden van de werkelijkheid. Ook in dit opzicht dienen deze onderzoeken als voorbereiding van kennis, in het bijzonder van kennis op niet-zintuiglijk gebied.

4. Definitie en wetmatigheid

Een helder onderscheid tussen wetmatigheid en definitie werd tot nu toe vermeden. De volgende uiteenzettingen die aanknopen aan wiskundig-meetkundige inhouden, moeten daarover nader uitsluitsel geven. Tegelijkertijd zal een meer concreet beleven van de intieme samenhang tussen verschillende wetmatigheden aan de dag treden, hetgeen in de loop van de volgende hoofdstukken wordt verdiept. Aangezien zich al onze meetkundige overwegingen in een vlak afspelen, zal dit in de volgende definities en stellingen niet iedere keer weer expliciet vermeld worden.

We beschouwen een *lijnenwaaier*, dat wil zeggen de totaliteit van alle in een vlak liggende rechten, die door een vast punt S gaan. Vanuit een niet met S samenvallend punt R worden loodlijnen neergelaten op al deze rechten. We beweren dat de voetpunten X, de snijpunten van de loodlijnen van R op de rechten van S, alle op een cirkel liggen (figuur 1.2):

matig van aard is (vergelijk daartoe paragraaf 5), onze denkactiviteit zich *uitsluitend* oriënteert op de inhouden die worden gedacht en afziet van alle overige ervaringselementen.

Keren we nog een keer terug naar de beschouwing van het karakter van wetmatigheidsinhouden. Uitgaande van onze ervaringen met het cirkelbegrip hebben we ons bewust gemaakt, dat de wetmatigheidsinhouden alleen door middel van denkactiviteit tot verschijning gebracht kunnen worden. Ze hebben geen enkele concrete zintuiglijke bepaaldheid of aanschouwelijkheid: ze zijn *abstract*, louter structurele of functionele samenhang. Abstract zijn ze echter alleen vanuit het standpunt van het voorstellen. Vanuit het denken gezien zijn ze *concreet*-inhoudelijk: ze zijn het wezen, de kern, de zaak zelf. De concreetheid van het voorstellen is gegrond in bepalingen uit de zintuigwereld, die met het wezen van de zaak, dat betekent met haar wetmatigheid, niets te maken hebben. Of een cirkel een straal met een lengte van zeven millimeter of twaalf meter heeft, staat los van haar wezen. De concreetheid van de denkbepalingen daarentegen zijn gegrond in de kern van de zaak zelf. *Het wezen van een zaak kan nergens concreter worden gevat dan in het denken.*

3. Denken en kennen

Menig lezer zal verwachten dat in dit onderzoek een nader licht geworpen wordt op de relatie van het mathematische denken of het denken in zijn algemeenheid tot de concrete zintuiglijke werkelijkheid. Zo kan men vragen, hoe een mens ertoe komt om zulke begrippen als cirkel, rechte, punt enzovoorts, te vormen, en hoe deze begrippen precies samenhangen met bepaalde zintuiglijke waarnemingen. Deze vragen worden hier *niet* nagegaan. Natuurlijk moet in vele gevallen de *aanleiding* voor begripvorming, in het bijzonder in het elementaire mathematisch-geometrische gebied, gezocht worden in de wereld van de zintuigen. Anderzijds is het voor *begrippen* karakteristiek, dat zij geëmancipeerd *moeten* worden van deze zintuiglijke betrekking om ze in hun *eigen noodzakelijkheid* te doen manifesteren. In dit boek moeten in het bijzonder zulke processen onderzocht worden die tot ervaring leiden van de in zich rustende inhoud van de wetmatigheden, alsook tot verdergaande ervaringen die doorlicht en gedragen worden door deze in zichzelf gegronde noodzakelijkheid. Voor het bereiken van *dit* ervaringsgebied neemt de wiskunde, en in het bijzonder de meetkunde, een vooraanstaande plaats in. Het is de opgave van dit onderzoek om dit gedetailleerd uiteen te zetten.

Wanneer we het kennisproces in zijn totaliteit indelen in waarneming, begripvorming en het de waarneming en het begrip bij elkaar brengende

Na deze eerste ontwikkelingsperiode ontpopt zich de mathematica op een wijze die ons bekend is: namelijk als innerlijk gedachtengoed in een abstracte, niet dynamische vorm, een vorm waarin de levende werking tenietgedaan is. Wat we dan beleven is een complex van vaste, onwrikbare vormen: de oorspronkelijk koppeling met de levenskrachten is ongedaan gemaakt. Steiner merkt op dat de wiskunde in deze dode, starre gedaante geen blijvende bestaansvorm hoeft te zijn, maar dat er een *weg* is die leidt tot een innerlijke verlevendiging van de wiskunde. Dan kan men de wiskunde gaan beleven als een gebied van kosmische harmonieën en kan men ontdekken dat de strekking van mathematische ideeën verder reikt dan alleen maar onderdeel te zijn van het menselijk gedachtengoed.

De weg waarop Steiner doelt is de innerlijke scholingsweg zoals hij die onder meer beschreven heeft in «*Wie erlangt man Erkenntnisse der höheren Welten*» (GA 10).¹ Met name door de ontwikkeling van het vermogen van de *inspiratie* kan men de grondslag van de wiskunde in haar levende kosmische betekenis leren kennen. Omgekeerd kan men ook zeggen dat door het vatten van de diepere zin van de wiskunde men in de gelegenheid komt om te leren kennen wat inspiratie is. Het gebied dat de inspiratie bestrijkt, is overigens omvattender dan alleen dat van de wiskunde. Het vatten van de levende wiskunde is een vrij aanschouwen van de *realiteit* van de krachten die eerder actief waren in de opbouw van ons lichaam. Inspiratie betekent voor ons een nieuwe mogelijkheid van aanschouwen, waarin het wezenlijke gehalte van de werkelijkheid direct ervaarbaar wordt. Het is een kennisvermogen dat afstand heeft genomen van de materiële objecten en de zintuiglijke voorstellingen en waarin zuivere begrippen tot stand komen vanuit de activiteit van het ik. Steiner beschrijft de inspiratie ook als de stroom van indrukken die het ik kan verwerken tot begrippen.² Om toch een aan de zintuigwereld ontleend beeld te hebben van dit proces, kan men het alleen vergelijken met de *klankwereld*, maar dan wel opgevat als *een zuiver geestelijk klinken*. Men "hoort" wat in het innerlijk der dingen voorvalt. De wereld spreekt in deze klanken tegenover de menselijke ziel haar wezen uit.

Het valt aannemelijk te maken dat de eerder genoemde zintuigen in een gemetamorfoseerde zin tekenend zijn voor wiskundige activiteiten en dat ze een dieper begrip van de wiskunde mogelijk maken. Zoals een mens vaakzaam is ten opzichte van het wel en wee van zijn lichamelijkheid, zo

¹ Vertaald in de reeks "Rudolf Steiner / Werken en voordrachten" onder de titel «*De weg tot inzicht in hogere werelden*» (WV-d1).

² Steiner: «*Die Stufen der höheren Erkenntnis*» (GA 12).

kan de wiskundige de eenheid en samenhang bewaken van zijn gedachtenvormen als totaliteit. Zoals een kind zich leert bewegen in de ruimte, zo leert de wiskundige zich innerlijk te bewegen in de sfeer van de zuivere begrippen. Zoals een kind de balans vindt in het uiterlijk krachtenveld, zo moet de wiskundige het evenwicht bewaren in de mathematische bewerkingen. Zeer plastisch komt dat tot uitdrukking in het onderdeel van de algebra dat de theorie der vergelijkingen betreft: de vergelijking zelf komt neer op een balans met een linker- en een rechterkant, die altijd met elkaar in evenwicht dienen te blijven.

De plaats van het mathematisme in het jaarverloop

Het dierenriembeeld van de tweeling is in de westerse traditie van de astrologie verbonden met de periode vanaf 21 mei tot 21 juni en markeert daarmee het einde van het voorjaar. De zon wint nog steeds aan hoogte, maar niet meer met de onstuimige vaart van de maanden daarvoor: de mate van stijging neemt allengs af en op 21 juni wordt het hoogste punt bereikt en breekt een moment van "rusten" aan (het zomer-solstitium). Het is een tijdvak dat vervuld is van licht en kleur. Planten en bomen hebben hun belangrijkste uitbreidingsfase achter de rug en komen hoe langer hoe meer in een fase van rust. Voor veel planten valt het bereiken van de nieuwe uiterlijke vorm bovendien samen met de bloeiperiode. In haar bloemenpracht lijkt de plant een stralend beeld van de zon. Qua uiterlijke verschijning is de bloem een hoogtepunt, de plant bereikt daarin een toestand waarin het stoffelijke element tot de meest fijnzinnige gestalten is omgevormd en is verheven tot een kunstwerk van geuren en kleuren, waarin de zon haar overwinning lijkt te vieren op de duisternis.

Hoe past deze periode bij de aard van het mathematisme? Bij het mathematisme staat de wereld in het teken van de wiskunde. Kenmerkend voor de wiskunde is haar rusten in zichzelf. De wiskundige entiteiten laten zich kennen als vaste, onveranderlijke, in zichzelf rustende gegevenheden. Een belangrijke verwantschap schuilt ook in de licht-ervaring die men altijd weer kan opdoen in de denkwereld van de wiskundige en die verband houdt met de kwaliteit van het zuivere denken. Het zuivere denken zelf kan worden opgevat als vorm van leven op een hoger niveau.¹ Het zuivere denken kan gezien worden als bloei-fenomeen, waarin de mogelijkheid ontstaat van een geestelijke bevruchting.

¹ Zoals in het vorige onderdeel is gerefereerd, wordt in de geesteswetenschap de ontwikkeling van het denken gerelateerd aan een metamorfose van levenskrachten.

Vatten we een bijzondere wetmatigheid in het oog, bijvoorbeeld de door de bovengenoemde cirkeldefinitie (1) uitgedrukte samenhang, dan is deze inhoud niet verschijning van iets, maar de zaak zelf. Deze wetmatigheid staat op zichzelf. Het komt er niet op aan of ze door het subject A of het subject B wordt gedacht. Ze gaat het onderscheid van subject en object te boven. Ze moet en kan niet door buiten haar zelf staande factoren verklaard worden. Haar te *denken* betekent tegelijkertijd haar volledig te begrijpen. Niets blijft duister. Ieder element krijgt in de totale samenhang die wordt gedacht, zijn welbepaalde plaats. Het bezwaar dat de gegeven elementen (bij de cirkeldefinitie zijn dat de afstand, het middelpunt, het vlak, de meetkundige plaats) daarbij duister blijven, raakt niet de kern van de zaak. Het gaat om de *betrekking* van deze elementen ten opzichte van elkaar, niet om de opheldering van het wezen van deze elementen zelf.

Wat hier wordt aangevoerd als eigenschappen van een wetmatigheid, heeft deze met alle andere wetmatigheden gemeenschappelijk. Ze onderscheidt zich van andere wetmatigheden alleen door haar specifieke *inhoud*. Datgene wat een wetmatigheid tot een wetmatigheid maakt, moet worden bepaald als zijn *vorm*, oftewel de *wetmatigheidsvorm* (ook wel wetmatigheid van de wetmatigheid genoemd). Deze vorm staat nu tegenover de stof van de telkens specifieke wetmatigheidsinhoud. Wat voor een specifieke cirkel, bijvoorbeeld een cirkelvoorstelling vorm is, is voor de wetmatigheidsvorm stof. Daaruit blijkt dat vorm en stof geen absolute toedeling toelaat; deze hangt af van het betreffende gezichtspunt.

Van de boven subject en object uitgaande wetmatigheidsinhoud moet de *vorm van het optreden* in het individuele bewustzijn worden onderscheiden. Het corresponderende verschijningsmedium is het denken, dat scherp moet worden onderscheiden van het voorstellen. De vorm van hoe een wetmatigheid in het individuele bewustzijn verschijnt zij *begrip* genoemd. Wat specifieke *inhoud* (stof) betreft zijn wetmatigheid en begrip identiek. Aangezien in het volgende vooral de verhouding zal worden onderzocht van wetmatigheden (vorm) tot hun verschijningen, kan voorlopig van het onderscheid tussen wetmatigheid en begrip worden afgezien. Tenzij uitdrukkelijk iets anders vermeld wordt, passen we daarom in het vervolg *begrip* of *wetmatigheid* toe in de zin van de boven het subject en object uitgaande *inhoud*.

De lezer probeer om zich aan de hand van de mathematische samenhangen, die in de volgende hoofdstukken behandeld worden, de in zichzelf gegronde natuur van de wetmatigheid steeds opnieuw concreet tot ervaring te maken. (Daartoe bevinden zich nadere uiteenzettingen in paragraaf 3 van hoofdstuk X en in hoofdstuk XII). Daarbij zal het erop aankomen op te merken dat bij een denken dat vrij is van zintuiglijkheid, zuiver begrips-

deze paragraaf; ze duiden op algemene begrippen (categorieën), die in het vervolg diepgaand zullen worden onderzocht (zie in het bijzonder hoofdstuk X en XII).

Het onderscheid tussen een wetmatigheid en haar verschijningen in een zintuiglijk medium (waartoe ook het voorstellingsbewustzijn en de gesproken of geschreven taal behoren) berust daarop, dat de wetmatigheid die de uitdrukking is van de structurele samenhang *geen* bepalingen bevat, die slechts betrekking hebben op een enkele of enige verschijningen. De wetmatigheid omvat precies die bepalingen die ten grondslag liggen aan *alle* feitelijke en *alle* mogelijke verschijningen. Wie de mogelijkheid van dit onderscheid en daarmee van het vatten van een wetmatigheid als zodanig, onafhankelijk van *enige* verschijningswijze ontkent, heeft de overeenkomstige ervaring nog niet opgedaan. Bij gevolg zou hij dan ook niet van *wetmatigheden* mogen spreken, maar als het bijvoorbeeld gaat om een talige definitie alleen van zekere *woordcombinaties*. Merk op: de genoemde ervaring hoeft aanvankelijk niet hierin te bestaan dat iemand zich de wet bewust wordt in een vorm die los staat van taal en voorstellingen; het is voldoende wanneer men bemerkt dat de *inhoud* van een wet (zijn structurele samenhang) en de *vorm* van zijn optreden (zijn verschijning) twee wel te onderscheiden ervaringsfeiten zijn.

Alle tot nu toe genoemde *verschijningen* van een wetmatigheid vinden plaats in media, die tot het zintuiglijke bereik - in een ruimere zin - behoren. Dit blijkt heel anders te zijn voor de *wetmatigheid* zelf. Deze is te vinden in het denken; ze treedt slechts gedurende en door onze eigen denkactiviteit in het bewustzijn. Is deze wetmatigheid zelf weer een verschijning van iets, of vatten we met haar de kern van de zaak zelf? De nu volgende waarneming kan hierover helderheid verschaffen. Daarbij wordt het begrippenpaar *vorm* en *stof* gebruikt. Ieder object van ervaring kan beschouwd worden vanuit het aspect van zijn stof of vanuit het aspect van zijn vorm. Daarbij moet de "stof" hier niet gelijkgesteld worden met materialiteit in fysische-minerale zin. Richt men de aandacht op het stoffelijke aspect, dan vat men datgene in het oog wat het stempel draagt van de vorm, gevormd is; beschouwt men daarentegen de vorm, dan richt men zijn denkende opmerkzaamheid op het vormende, op het de stof bestempelende principe, informerende principe.

Laten we een concrete cirkel beschouwen, bijvoorbeeld een cirkel van krijt op het bord. Zijn *vorm* is bepaald door de cirkelwet, terwijl zijn stof samengesteld is uit zintuiglijke elementen van het bord en het krijtstof. Laatstgenoemde is door de cirkelwet zo geordend dat een concrete cirkel zichtbaar wordt.

Het beeld van de tweeling

De tweeling is op vele manieren afgebeeld. Altijd betreft het de voorstelling van twee leeftijdgenoten. Soms zijn het jongens, soms jongemannen en in vele gevallen zien we een man en een vrouw. Vrijwel altijd worden ze weergegeven in verbondenheid, vaak gearmd of hand in hand: ze beroeren elkaar op de een of andere manier. In vele gevallen valt een jeugdige, speelse uitstraling waar te nemen.



*Afbeelding van de tweeling met sikkel en lier
uit een 15^e-eeuwse vertaling van de Arabier Albumasar*

Hoe kan deze menselijke, elkaar beroerende tweeheid in verband worden gebracht met het mathematische? De tweeheid zelf kan als teken van het getalsmatige worden uitgelegd, als een eerste veelheid die tot eenheid wordt gebracht door het verstand en als zodanig, als tweeheid,

begrepen wordt. Deze samenhang ligt erg voor de hand en de vraag is of, afgezien van dit toch wat oppervlakkige verband, nog meer aanknopingspunten te vinden zijn.

De tweeling drukt een tegenoverstelling uit, waarbij tegelijkertijd sprake is van diepste verbondenheid. De voorstellingen met man en vrouw benadrukken deze polariteit. Deze geslachtelijke polariteit kan ook in innerlijke zin worden verstaan, namelijk als de verbinding die een mens *in zichzelf* met het geestelijk hogere aangaat. De lagere aardse mens - in de mannelijke gedaante - verbindt zich met de hogere, hemelse mens - in de vrouwelijke gedaante. Deze verbinding heeft de uitwerking van een bevruchting. Op de hier getoonde illustratie zijn man en vrouw als engelen weergegeven. De gevleugelde vrouw draagt een lier en de gevleugelde man heeft een sikkel in de hand: door de verbinding met de wereld van goddelijke inspiratie - uitgebeeld door de lier - kunnen aardse vruchten worden geoogst - uitgebeeld door de sikkel. Zo ook laat de mathematisist zich inspireren vanuit hogere sferen door zich te verbinden met het innerlijke licht. Dit is tegelijkertijd een verbinding met zijn hogere zelf. In het zuivere denken ontmoet de mens de vruchten van zijn eigen actieve ontplooiing. Het zuivere denken gaat daarom altijd gepaard met een vorm van zelfbewustzijn.

Zoals al eerder is aangegeven moet de geesteswetenschappelijke oorsprong van de wiskunde gezocht worden in de wereld van de inspiratie. Het beeld van de tweeling heeft Steiner zelf getypeerd als een *zichzelf ervaren, betasten*¹. Ook hij vat de twee elkaar beroerende mensenwezens op als een kontakt dat zich *in* de mens afspeelt en waarin hij zich van zijn eigen activiteit bewust wordt, hetgeen tot zelfbewustzijn leidt.

Tenslotte zij gewezen op het aspect van de jeugdige, speelse, zonnige uitstraling. Deze kan in verband worden gebracht met de etherische wereld, de wereld van de vormkrachten die ten grondslag ligt aan al wat leeft. Etherische krachten zijn verantwoordelijk voor iedere vorm van leven en hangen nauw samen met de vormende werking van het licht. Zoals eerder reeds is toegelicht wordt in de antroposofische geesteswetenschap beschreven hoe door het vrijkomen van etherische lichaamskrachten de mogelijkheid ontstaat van de ontwikkeling van verstandelijke vermogens in het algemeen en van wiskundige vermogens in het bijzonder.

¹ Rudolf Steiner, «*Anthroposophie als Kosmosophie*» (GA 208), voordracht van 28 oktober 1921. Steiner beschrijft hierin tevens dat bij de tweeling sprake is van een kontakt van de rechter-mens met de linker-mens.

schijningsmedium "gestolde", bevroren vorm. Daar tegenover kan de cirkelwet als "vormloos" worden beschouwd.

De hierboven in taal geformuleerde definitie van de cirkel is slechts *één* onder vele mogelijke verschijningsvormen in taal. Het corresponderende medium is de taalwetmatigheid. Men kan dezelfde definitie ook met geheel andere woorden en wendingen beschrijven:

- (1a) Een cirkel bestaat uit de verzameling van alle punten van een vlak, wier radiusvector vanaf een vast punt in dat vlak een constante lengte heeft.

Verder is deze definitie ook in een andere taal om te zetten; toch ligt aan al deze talige uitdrukkingen, dat wil zeggen zinnen en uitspraken, dezelfde definitie ten grondslag.

Van de definitie van de cirkel binnen het medium van de taal bestaat dus geen vanuit de aard van de zaak eenduidig vastgelegde verschijningsvorm, netzomin als er een tot standaard te verheffen voorstelling van de cirkel bestaat. Alleen op grond van conventie kunnen bepaalde *voorstellingen* - in tegenstelling tot wetmatigheden - evenals bepaalde *formuleringen* een voorkeursstatus verkrijgen. Deze onverschilligheid van een wetmatigheid ten opzichte van haar verschijningsvormen hangt samen met de wijze waarop de eenduidigheid, die op de innerlijke noodzakelijkheid van de structurele samenhang berust, zich verhoudt tot de veelheid van verschijningsvormen, die via het medium realiseerbaar zijn. Iedere wetmatigheid legt haar verschijningsvormen wat betreft *formele* mogelijkheid vast; daarentegen is de verscheidenheid in de verschijningsvormen gegrond in de bijzonderheden van het betreffende verschijningsmedium. Iedere verschijning is het resultaat van een modificatie van de wezenswetmatigheid op grond van een medium. Zo heeft de taal haar eigen regels (orthografie, grammatica, syntaxis), zoals ook het bord met het krijt, de tekentafel met het potlood, enzovoorts; deze mediumspectifieke, niet tot de eigenlijke wezenswet behorende (dus onwezenlijke, accidentele) eigenschappen drukken eveneens hun stempel op de *verschijning*.

2. Vorm en stof

De hiervoor gemaakte onderscheidingen dienen als een eerste oriëntatie in het gebied van het geometrische denken en voorstellen. Ze worden in de loop van deze uiteenzetting veelvuldig gebruikt en nader bepaald; ze zullen een veel meer omvattende betekenis blijken te hebben dan aanvankelijk zou kunnen lijken. Hetzelfde kan gezegd worden van de beschouwingen van

de ervaringswereld, dat weliswaar alleen de rol speelt van een aanleidings-oorzaak en niet van een werkoorzaak voor de bedoelde samenhang. Dit betekent dat de door het denken voortgebrachte begrippen weliswaar door de ervaring worden gewekt, maar noch wat inhoud betreft uit de ervaring worden gewonnen, noch wat activiteit betreft door deze worden bewerkstelligd.

De door bovenstaande definitie gegeven structurele samenhang is voor alle concrete afzonderlijke cirkels dezelfde. Ze verschillen op grond van de telkens andere zintuiglijke invulling van de elementen: zo ligt iedere cirkel in een welbepaald vlak en heeft iedere cirkel een welbepaalde straal. De concrete bepaaldheden van deze elementen kunnen geen onderdeel van de definitie zijn, want ze zijn specifiek voor sommige, maar niet voor alle cirkels. Hieruit volgt dat de *verschijningen* van de cirkelwet zich van deze wet onderscheiden door specifieke zintuiglijke bepalingen of invullingen van de afzonderlijke elementen (hier in het bijzonder middelpunt en straal).

Afgezien van deze specifieke gedaantes van de cirkelwet zijn de verschijningen van deze wet zich nog te differentiëren naar de aard van het *medium* waarin deze verschijningen optreden. Onder medium verstaan we de "stof" of het zijnsgebied, waarin zich een algemene wet manifesteert. Zo bestaat er een onderscheid tussen cirkels die ik mij voorstel, die ik op het bord teken, die ik met de passer op papier teken, enzovoorts. Deze verschillen laten niets van de cirkelwet als zodanig zien en worden daarom terecht bij een analyse van de cirkelwet geïgnoreerd; we ervaren echter wel wat van het verschijningsmedium. Dit mag voor de cirkel triviaal zijn, het belicht echter een fundamentele eigenschap van alle verschijningen - en ons bewustzijn heeft immers aanvankelijk vooral te doen met verschijningen.

Iedere verschijning draagt het stempel van twee wetmatigheden. Wat haar *kern* betreft, is ze bepaald door het wezen, oftewel door de wetmatigheid waarvan ze verschijning is, en wat de *vorm* van haar optreden betreft is ze gemodificeerd door de wetmatigheid van het verschijningsmedium.

In deze zin is een *cirkelvoorstelling* een verschijning van de cirkelwet in het voorstellingsbewustzijn. De concrete bepaaldheid van de elementen van de wet is juist karakteristiek voor dit medium. Voorstellingen zijn tot een concreet-aanschouwelijke gestalte geïndividualiseerde wetmatigheden, waarbij hun wederzijds geïsoleerd-zijn juist gegrond is in hun concreetheid. Wat ze verbindt, is de wet, die echter als zodanig niet in het voorstellingsbewustzijn verschijnt, maar alleen in het denken. Tegenover de alle mogelijke cirkels omvattende cirkelwet hebben de cirkelvoorstelling en ook iedere op een andere wijze verschijnende cirkel een vaste, in het ver-

Mathematisme in de kring der wereldbeschouwingen

Hoe verhoudt het mathematisme zich tot de overige wereldbeschouwingen? We beperken ons tot de betrekkingen met de direct aangrenzende wereldbeschouwingen en de tegenoverliggende wereldbeschouwing.

Volgens het jaarverloop wordt het mathematisme voorafgegaan door het *rationalisme* (in het teken van de *stier*) en gevolgd door het *materialisme* (in het teken van de *kreeft*). Waar de mathematisist in zijn kijk op de wereld zich wil beperken tot begrippen die in het teken staan van uiterlijke vormen en getalsmatige verhoudingen, is de rationalist bereid om zijn begripveld te verruimen. Hij aanvaardt *alle* begrippen en ideeën mits ze te rechtvaardigen zijn vanuit de zintuiglijke waarneming en beleeft de wereld dus niet alleen met begrippen die betrekking hebben op meetkundige figuren en rekenkundige relaties. Waar de mathematisist vooral geïnteresseerd is in de *primaire* eigenschappen van de dingen, d.w.z. eigenschappen die betrekking hebben op de uiterlijke vorm, heeft de rationalist oog voor alles wat zich binnen de werkelijkheid als eenheid laat vatten. Ook de overige, secundaire eigenschappen van de dingen wil hij begripmatig verwerken. Zo is de wereld vervuld van geuren en kleuren en van vele andere kwaliteiten, mits ze zich voldoende ordelijk voordoen om benoemd en geclassificeerd te worden. Wat valt er niet allemaal te rangschikken in de werkelijkheid! Mineralen, planten, dieren, planeten enzovoorts. Zij maken deel uit van de zintuiglijke werkelijkheid en hebben de aandacht van de rationalist.

Waar de rationalist en de mathematisist beiden de uiterlijke werkelijkheid vervuld zien van door het verstand te vatten orde en regelmaat - de één in een meer algemeen classificerende zin, de ander in een specifieke context van wiskundig te fixeren vormen en verhoudingen - richt de materialist zijn aandacht op de ervaring van het stoffelijke in zijn duurzaam ruimtebeslag. Deze ervaring van gebonden ruimte vertaalt hij bijvoorbeeld naar een wereldbeeld van atomen als elementaire ruimtevullende eenheden. Schrijft hij aan deze atomen specifieke vormen toe en beschouwt hij de bewegingen van deze atomen als regelmatig en wiskundig definieerbaar, dan heeft hij zijn gezichtsveld verruimd naar het mathematisme. Dan ontstaan vormen van mechanisme.

Het mathematisme staat in de kring der wereldbeschouwingen tegenover het *monadisme* (in het teken van de *boogschutter*). Blijkt deze tegenstelling ook uit het karakter van de betrokken wereldbeschouwingen? Het monadisme gaat uit van eenheden van innerlijke aard, die monaden worden genoemd (monas is het Griekse woord voor eenheid). Volgens Leibniz worden monaden gekenmerkt door een streefvermogen en voorstellingsver-

mogen. Tegenover de *veelheid* van op zichzelf staande *innerlijke* wezens als kleine werelden op zich (mikrokosmoi) staat bij de mathematisist de *eenheid* van de door *uiterlijke* vormen en verhoudingen bepaalde grote wereld (makrokosmos).

Welke zielestemming is thuis in het mathematisme?

Naast de twaalf wereldbeschouwingen heeft Rudolf Steiner ook een beschrijving gegeven van een zevental zogenoemde *wereldbeschouwingsstemmingen*. Zo'n wereldbeschouwingsstemming vertegenwoordigt een typische zielestemming: een karakteristieke wijze waarop iemand als innerlijk wezen zich kan verhouden tot de werkelijkheid. Deze zieletypen heeft hij in samenhang gebracht met de verschillende planeetsferen. In beginsel kan een wereldbeschouwing gepaard gaan met elk van de gegeven stemmingen, maar niet iedere combinatie vormt een even harmonische eenheid.

Om te bepalen welke zielestemming het meeste aansluit bij het mathematisme kunnen we als leidraad nemen dat voor de mathematisist de *verstandelijke activiteit* voorop staat, waarbij het accent ligt op uiterlijke, objectieve, vaste samenhangen.

Twee stemmingen lijken het meest in aanmerking te komen, namelijk die van het *logisme* (in samenhang met de planeetsfeer van *Jupiter*) en die van het *transcendentalisme* (in samenhang met de planeetsfeer van *Mercurius*). Het logisme wordt gekenmerkt door een zielekwaliteit die voor alles de samenhang van gedachten tot zijn recht wil laten komen. Gedachten worden aaneengevoegd als waren zij de takken en bladeren van een machtige boom. Dit komt overeen met het logische opbouwende karakter van de wiskunde, vooral in de zin van levende wiskunde. Aan de andere kant kan gedacht worden aan het transcendentalisme, aangezien in deze stemming het wezenlijke wel naderbij komt, maar nog *buiten het subject* blijft staan, en om zo te zeggen aan gene zijde (transcendent) blijft. Deze stemming lijkt goed aan te sluiten bij de wiskunde in zijn meer abstracte hoedanigheid.

In een eerder verschenen artikel over de wereldbeschouwingsstemmingen kwam naar voren dat bij beide stemmingen binnenwereld en buitenwereld een even grote rol spelen¹. Voorts bleek dat beide stemmingen

Misschien herinneren we ons een op school geleerde definitie; of we moeten bij ons zelf *nagaan* hoe je een cirkel construeert.

Bij iedere concrete cirkel hoort een qua ligging welbepaald *middelpunt* en een *straal* (radius) van bepaalde grootte. Verder ligt iedere cirkel in een daarbij behorend *vlak*. Daarbij bestaat tussen deze elementen een betrekking die onafhankelijk is van hun specifieke verschijningswijze (ligging, grootte). Zo'n concrete betrekking tussen welbepaalde elementen wordt *definitie* genoemd. Voor het zoëven besproken geval luidt de definitie van de cirkel, die voor het eerst in deze vorm door Plato is overgeleverd, als volgt¹:

- (1) Een cirkel is de meetkundige plaats van alle punten in een vlak die een vaste afstand hebben tot een vast punt van dit vlak, het middelpunt.

De in de definitie genoemde vaste afstand wordt *radius* genoemd. Wil deze definitie zinvol zijn, dan moet reeds duidelijk zijn wat de elementen *meetkundige plaats*, *punt*, *vlak*, *afstand* en *liggen* betekenen. Wat door deze definitie toegevoegd wordt en uitgaat boven de afzonderlijke elementen, is haar functionele eenheid, haar innerlijke, structurele samenhang. Deze samenhang is niet willekeurig. Men kan de gegeven elementen niet op willekeurige wijze met elkaar verbinden, wil het resultaat zinvol zijn. Alleen *deze ene* samenhang levert een consistente structuur op die we erkennen als cirkelwet. Zo heeft bijvoorbeeld de volgende uitspraak als uitdrukking van een wetmatigheid geen zin: de cirkel is het middelpunt van alle meetkundige plaatsen die dezelfde afstand hebben tot een vlak.

De opbouw van een wetmatigheid in de vorm van een definitie gaat uit van reeds bekende factoren (elementen) en bedient zich hiervan bij het tot stand brengen van een nieuwe, hogere structurele samenhang. Vraagt men naar de *betekenis* van "afstand" of "punt", dan verlaat men het oorspronkelijke probleem van de wetmatigheid van de cirkel en richt men zich bijvoorbeeld op de wet van de afstand. Maar ook voor het onderzoek naar de betekenis van de afstand moet men weer teruggrijpen op reeds als bekend veronderstelde factoren of elementen. Ons denken kan zijn inhoud niet uit het niets scheppen. Het moet een concreet uitgangspunt hebben in

¹ zie *JANUS* jaargang 2, nummer 1.

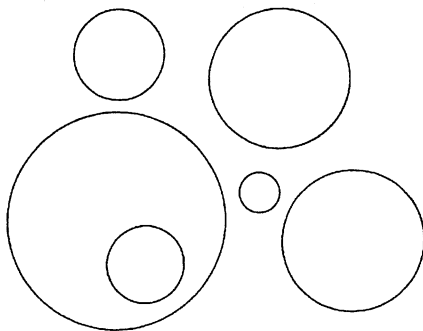
¹ Deze definitie vindt men voor het eerst in de dialoog «*Parmenides*». Daar staat: "Rond is evenwel dat, waarvan de eindpunten overal even ver van het midden afstaan." (137e). De moderne versie van deze definitie gaat terug op de formulering van Euclides in de «*Elementen*», boek 1, definitie 15.

DE CIRKEL ALS FILOSOFISCH EN MATHEMATISCH PROBLEEM

door Renatus Ziegler¹

1. De cirkel als wetmatigheid en verschijning

Iedereen weet wat een cirkel is: de cirkel behoort tot de best bekende mathematische inhouden. We zijn altijd in staat om te bepalen of een ons voorgehouden meetkundige vorm een cirkel is of niet. Zo zijn alle in figuur 1.1 weergegeven vormen cirkels. Elk van deze cirkels heeft iets gemeenschappelijks met de overige cirkels, dat niet in de figuur zelf tot verschijning komt: zijn *wetmatigheid*. Alle cirkelfiguren zijn onderworpen aan dezelfde wet; ze zijn er verschillende *verschijningsvormen* van. Als verschijningen, dat wil zeggen als specifieke uiterlijke gedaantes van de cirkelwet, zijn ze door ligging en grootte duidelijk van elkaar verschillend.



Figuur 1.1

Waaruit bestaat nu de wetmatigheid van de cirkel? Aangezien we in staat zijn cirkelvormen te herkennen, moeten we een bepaalde *kennis* hebben van deze wetmatigheid. Het gaat er om deze kennis in het licht van het bewustzijn te brengen. Dit kan op verschillende manieren plaatsvinden.

¹ Vertaling van hoofdstuk I van R. Ziegler: «*Mathematik und Geisteswissenschaft*», Philosophisch-anthroposophischer Verlag, 1992; vertaler: J. van der Schuit.

sterk verbonden zijn met de verstandsziel¹, en wel bij het logisme vooral in actieve zin en bij het transcendentalisme in meer passieve zin.

Als we dan een vorm van mathematisme beschouwen waarbij de toepassing van *resultaten* van wiskundig denken voorop staat, bijvoorbeeld in het kader van de materialistische natuurwetenschap, als mechanisme, dan kan van een innige verwantschap met het transcendentalisme gesproken worden. Aan de andere kant zal een mathematisme waarbij de nadruk ligt op de *activiteit* van het wiskundig denken vooral gebaat kunnen zijn met het logisme. Deze invalshoek neigt meer dan de voorgaande tot een spiritualisering van het denken. Binnen de astrologische traditie wordt het dierenriembeeld van de tweeling in verband gebracht met de planeet Mercurius.

Welke aristotelische categorie hoort bij het mathematisme?

Heeft het mathematisme een bijzondere verwantschap met één van de aristotelische categorieën? Rudolf Steiner heeft in enkele voordrachten duidelijk gemaakt dat de tien categorieën van Aristoteles op te vatten zijn als een kosmisch alfabet. Het zal de kunst van de toekomst zijn om te leren lezen in dit kosmische schrift. Een onderzoek naar de eventuele samenhang met het kosmische krachtenveld van de dierenriem ligt voor de hand. Hoe pakt deze mogelijke samenhang uit voor het spiritualisme als wereldbeschouwing van de tweeling?

Sigismund von Gleich² en Günther Schubert³ noemen als passende categorie die van de *hoeveelheid* of *grootte* (Grieks: *poson*; Latijn: *quant-*

¹ Steiner beschouwt de verstandsziel als dat onderdeel van de ziel, waarbij de denkende geest ordenend werkzaam is in het gebied van de gewaarwordingen, zodanig dat de werkelijkheid voor eigen doeleinden kan worden gebruikt. De verstandsziel staat qua ontwikkelingsniveau in tussen de (lagere) gewaarwordingsziel en de (hogere) bewustzijnsziel. Zie «*Theosophie*» (GA 9).

² S. von Gleich «*Die Wahrheit als Gesamtumfang aller Weltansichten*», Mellinger Verlag 1957.

³ G. Schubert «*Die Kategorien des Aristoteles*», in «*Beiträge zur Rudolf Steiner Gesamtausgabe*», Nr. 29. Merkwaardigerwijs heeft Schubert later mondeling afstand genomen van dit eerder ingenomen standpunt en de categorie van de *relatie* als wezenlijk genoemd voor het mathematisme.

tas). Het hoeft weinig betoog dat deze categorie van alle categorieën de aard van de mathematica het meest treft. Toch is het misschien goed om de betiteling van deze categorie op te vatten als een *pars pro toto*, aangezien veel van de wiskunde, maar niet alles gedekt wordt door getal of grootte.

Enige voorbeelden van mathematisme

Een mathematisist is iemand voor wie de werkelijkheid geschreven is in de taal der wiskunde. Wanneer we voorbeelden trachten te vinden van mathematisme kunnen we globaal twee invalshoeken onderscheiden, namelijk vanuit een meer *innerlijk* en een meer *uiterlijk* gezichtspunt. In de eerste vorm ligt de nadruk op de spirituele kant van de wiskunde in samenhang met een spirituele ervaring van mens en wereld. Dan staat de wiskunde model voor een kenvermogen, waarmee de mens kan reiken tot aan zijn goddelijke oorsprong. In de tweede vorm staan de toepassingsmogelijkheden van de wiskunde voor het begrijpen en beheersen van de natuur centraal. Hierbij gaat het om het enthousiasme om op basis van wiskundige formules de werkelijkheid in de greep te krijgen. Een dergelijk streven ligt ten grondslag aan de ontwikkeling van de natuurwetenschap en de techniek vanaf de 16e eeuw.

Van beide vormen van mathematisme willen we voorbeelden geven. Richtten we ons eerst op de innerlijke variant van het mathematisme. De meer spirituele blikrichting brengt met zich mee dat de vertegenwoordigers die in dit verband kunnen worden genoemd, in de regel geen eenzijdige mathematisen zijn, maar hun mathematisme beleven in combinatie met andere meer geestelijk getinte beschouwingswijzen. Anderzijds is natuurlijk ook iemands wereldbeschouwingsstemming van invloed op de aard van het mathematisme. Innerlijk georiënteerde beschouwingswijzen gaan doorgaans samen met een flexibele, niet eenkennige gesteldheid. Wat dat betreft neigt de uiterlijke variant van mathematisme gemakkelijker tot eenzijdigheid.

In de geschiedenis van de filosofie kunnen we allereerst *Pythagoras* en de *Pythagoreërs* noemen. Deze stroming is een van de meest controversiële onderdelen van de Griekse filosofie: er is weinig met zekerheid van bekend. Vaststaat dat Pythagoras de stichter is geweest van een leefgemeenschap in Croton (gelegen in het uiterste zuiden van Italië) die gericht was op spirituele verdieping. Voor de levenswijze van de deelgenoten van deze orde golden strenge regels. Nog tijdens het leven van Pythagoras kwam deze gemeenschap echter in opspraak bij omwonenden en werd zij uiteindelijk totaal vernietigd. Ook na zijn dood bleef het Pythagorisme nog

afhankelijke disciplines beoefenen, en niemand zich druk maakt om haar te leren? Zonder twijfel zou ik dat zeer verrassend vinden als ik niet wist dat iedereen het onderwerp te gemakkelijk acht, en als ik niet sinds lange tijd had waargenomen dat het menselijk intellect altijd aan onderwerpen voorbijgaat waarvan het denkt dat het ze gemakkelijk kan beheersen en direct voortijlt naar nieuwe en grotere zaken.

Omdat ik me bewust ben hoe zwak mijn vermogens zijn, heb ik besloten om in mijn zoektocht naar de kennis der dingen onwrikbaar vast te houden aan een bepaalde orde, altijd beginnend bij de eenvoudigste en de gemakkelijkste dingen, en deze nooit te boven te gaan totdat er, wat hun betreft, verder niets de moeite waard is om te bereiken. Tot nu toe heb ik daarom al mijn energie gewijd aan deze universele mathematica, zodat ik volgens mij te zijner tijd in staat zal zijn om de wat meer ontwikkelde wetenschappen aan te pakken, zonder dat mijn inspanningen voorbarig zijn. Maar voordat ik me met die taak ga bezighouden, zal ik proberen om datgene, wat ik in mijn voorgaande studies opmerkelijk vond, bij elkaar te brengen en op een ordelijke manier te rangschikken, zodat op het moment dat mijn herinneringsvermogen op hoge leeftijd achteruit gaat, ik zonodig het later gemakkelijk kan terugroepen door het raadplegen van dit boek en zodat ik, doordat ik mijn geheugen van een last bevrijd heb, voortaan mijn geest vrijer kan wijden aan hetgeen overblijft.

met slimme argumenten bewezen waarheden als de vruchten van hun methode hebben getoond, in plaats van ons de methode zelf te leren, wat onze bewondering zou kunnen hebben verdreven. In de huidige tijd hebben sommige zeer getalenteerde mensen geprobeerd om deze methode te doen herleven, want de methode lijkt mij geen andere te zijn dan de kunst die schuilt achter de buitenlandse naam 'algebra' - of zij zou zo zijn als algebra ontdaan werd van de veelheid van getallen en onbegrijpelijke figuren waardoor ze wordt overstelpt en in plaats daarvan die overvloed aan helderheid en eenvoud bezat die volgens mij de ware wiskunde dient te hebben. Door deze gedachten keerde ik mij van de bijzondere studies van de rekenkunde en meetkunde naar het algemeen onderzoek van *mathematica*. Ik begon mijn onderzoek door na te gaan wat er precies bedoeld is met de term 'mathematica' en waarom het zo is dat, naast rekenkunde en meetkunde, wetenschappen als onder meer astronomie, muziek, optica, mechanica takken van *mathematica* worden genoemd. Om dit te beantwoorden is het niet voldoende om naar de etymologie van het woord te kijken, want, aangezien het woord 'mathematica' dezelfde betekenis heeft als 'leer', hebben deze onderwerpen evenveel recht op de naam 'mathematica' als meetkunde dat heeft. Toch is het evident dat bijna iedereen met een beetje ontwikkeling gemakkelijk in iedere context het verschil kan vertellen tussen datgene wat op *mathematica* en datgene wat op andere disciplines betrekking heeft. Toen ik de zaak aan een nauwkeuriger beschouwing onderwierp, kwam ik tot het inzicht dat *mathematica* uitsluitend de zorg heeft over vragen van orde of maat en dat het onbelangrijk is of de maat in kwestie betrokken is op getallen, vormen, sterren, geluiden of op welk ander object dan ook. Dit bracht mij tot het besef dat er een algemene wetenschap moest zijn die alle vragen verklaart die kunnen worden opgeworpen met betrekking tot orde en maat ongeacht de aard van het onderwerp, en dat deze wetenschap *mathesis universalis*¹ genoemd zou moeten worden - een eerbiedwaardige benaming met een goed gefundeerde betekenis - want het dekt alles wat die andere wetenschappen het recht geeft om takken van *mathematica* te worden genoemd. Hoe verheven deze is ten opzichte van de andere wetenschappen, zowel in bruikbaarheid als in eenvoud, is duidelijk door het feit dat zij alles beslaat waar de andere mee te maken hebben en nog meer; en elke moeilijkheid die zij bevat is ook op de andere van toepassing, terwijl hun bijzondere inhoud moeilijkheden bevat die zij mist. Nu kent iedereen de naam van deze discipline en zonder haar zelfs te hoeven bestuderen weet iedereen wat haar inhoud is. Dus waarom is het zo dat de meeste mensen onverdrotten de andere, van haar

¹ D.w.z. universele mathematica.

eeuwenlang vertegenwoordigd. Onder de vertegenwoordigers valt een religieuze stroming te onderscheiden van een meer filosofische. De volgelingen van de laatstgenoemde stroming stonden bekend als de *mathematici*. Zij hielden zich bezig met getallenleer, meetkunde, astronomie en muziek, omdat zij deze disciplines bij uitstek geschikt achtten voor het leren kennen van de orde van de kosmos. Er werd vooral veel betekenis gehecht aan de kosmische betekenis van de getallen. Van Aristoteles is een uitspraak overgeleverd dat volgens Pythagoras "de dingen getallen zijn", en ook, minder extreem, dat "de dingen getallen imiteren". Vaststaat dat deze opvattingen zeker gesteund werden door het inzicht dat muzikale intervallen gebaseerd zijn op eenvoudige verhoudingen van gehele getallen. Dit kon men constateren aan de hand van de lengte van de snaar in samenhang met de bijbehorende toonhoogte. Het kan zijn dat Pythagoras ook van mening was dat de werkelijkheid tot in haar substantiële hoedanigheid bestaat uit getallen. In ieder geval is zeker dat hij aan getallen een reëel werkzame invloed toeschreef, en wel in nauwe samenhang met een tiental principes van oppositionele aard. Het eerste hiervan is het belangrijkste, namelijk de tegenstelling tussen het begrensde en het onbegrensde. Dat getallen op dit principe berusten, kan worden begrepen als men bedenkt dat juist getallen zulke onmiskenbare bepaaldheid bezitten. Onderdeel van de Pythagoreïsche gedachtenwereld is voorts dat alles wat beweegt muziek maakt, ook de planeten. Zij produceren, onhoorbaar voor het gewone oor, een hemelse muziek: de *harmonie der sferen*. Hiermee zij in het kort aangeduid hoe met Pythagoras een traditie ontstond waarin de diepere, spirituele betekenis van de *mathematica* centraal staat in samenhang met de ontwikkeling van een kenvermogen dat we de inspiratie kunnen noemen.

Het pythagoreïsche denken heeft een grote invloed op Plato gehad. In de Akademie van Plato stond de wiskunde in hoog aanzien, zozeer zelfs dat bij de toegang tot de Akademie een spreuk was aangebracht, die de kennis van meetkunde bij iedere binnenkomer veronderstelde. De wiskunde was een belangrijk middel om de richting van de ziel van de zintuiglijke wereld om te buigen naar de wereld van de ideeën. De wiskunde vertegenwoordigt voor Plato overigens nog niet de hoogst denkbare kennis. Dit omdat wiskunde uitgaat van gegeven veronderstellingen. Op een hoger niveau is het mogelijk om te denken zonder te voren gegeven uitgangspunten. Dit noemt Plato het *dialectische* denken. Waar de gewone wiskunde zich beweegt in het vlak van het verstand komt men in het dialectische denken tot de hoogte van de levende rede: op dat niveau kan ook het levende en werkzame gehalte van ideeën tot innerlijke ervaring worden.

Voor verdere voorbeelden van wiskundig georiënteerde denkers met een spirituele invalshoek verwijzen we graag naar *«Mathematik und Geisteswis-*

senschaft» van Renatus Ziegler. In dit boek wordt uitvoerig ingegaan op wiskundige aspecten van het werk van resp. Plato, Cusanus, Goethe, Hegel en Steiner. Tenslotte willen we in dit verband ook de dichterschrijver Novalis noemen. In zijn studietijd raakte hij geboeid door de bijzondere positie van de wiskunde binnen het geheel der wetenschappen. Steiner zelf noemt Novalis een voorbeeld van een denker die begrip had voor de "levende wiskunde".

Voor voorbeelden van het mathematisisme in een meer uiterlijke hoedanigheid verwijzen we allereerst naar de belangrijke wegbereiders voor de ontwikkeling van de moderne natuurwetenschap, naar figuren als Galilei, Copernicus, Kepler en Newton. Voor hen is de werkelijkheid geschreven in de taal der wiskunde. Wiskunde is daarom het instrument bij uitstek voor het vaststellen en formuleren van de orde der dingen. Dankzij de toepassing van de wiskunde in het begrijpen van de fysieke werkelijkheid is een ontwikkeling op gang gebracht die kan worden omschreven als de *mechanisering van het wereldbeeld*¹, een ontwikkeling die nog steeds voortduurt tot in onze eeuw. De werkelijkheid wordt in deze zienswijze gereduceerd tot mathematische proporties. In deze traditie zijn in wetenschap en techniek de meest indrukwekkende resultaten geboekt en het aanzien van de wereld is er ingrijpend door veranderd. Hierbij gaat het eigenlijk niet om een enkele vertegenwoordiger van het mathematisisme, maar naar omvang en diepgang kenschetst deze traditie onze westerse cultuur als geheel. De filosoof Heidegger heeft deze ontwikkeling scherp waargenomen en geanalyseerd.²

¹ Zie E.J. Dijksterhuis: *«De mechanisering van het wereldbeeld»*, Meulenhoff Amsterdam, 1950. Dit standaardwerk over de geschiedenis van het natuurwetenschappelijk denken besluit met de volgende conclusie: "De mechanisering, die het wereldbeeld bij de overgang van antieke naar klassieke natuurwetenschap heeft ondergaan, heeft bestaan in de invoering van een natuurbeschrijving met behulp van de mathematische begrippen der klassieke mechanica; zij beduidt het begin van de mathematisering der natuurwetenschap, die in de physica der twintigste eeuw haar voltooiing krijgt".

² Zie Heidegger: *«Die Frage nach dem Ding»*, Max Niemeyer Verlag Tübingen. Dit boek bevat de tekst van een college uit het wintersemester van 1935/36 en bevat een interpretatie van het werk van Kant vanuit het gezichtspunt van het mathematische. Voorafgaand wordt ook het denken van Newton en Descartes in dit licht geplaatst.

ons verstand te gebruiken. Tegelijkertijd is er niets zo gecompliceerd dan het gebruik van zo'n bewijsmethode voor het oplossen van nieuwe problemen die gekenmerkt zijn door getalsmatige wanorde. Later vroeg ik mij af waarom de grondleggers van de filosofie niemand tot het nastreven van wijsheid wilden toelaten die niet bedreven was in wiskunde - alsof zij dachten dat deze discipline de eenvoudigste was en het minst van alle gemist kan worden om de geest te vormen en voor te bereiden op het vatten van andere, meer belangrijke wetenschappen. Ik ging het vermoeden krijgen dat ze bekend waren met een soort wiskunde die sterk verschilt van die welke tegenwoordig de overhand heeft; niet dat ik dacht dat ze er een volmaakte kennis van hadden, want hun wild gejubel en dankzeggingen voor triviale ontdekkingen toont duidelijk aan hoe rudimentair hun kennis moet zijn geweest. Ik word niet van mijn mening afgebracht door die machines van hen die door historici zo worden geprezen¹. Die mechanische toestellen kunnen best vrij eenvoudig zijn geweest, zelfs ondanks het feit dat de onwetende en op magie verzotte massa ze wellicht heeft verheven tot het niveau van wonderen. Maar ik ben overtuigd dat in dat ongekunstelde en onschuldige tijdperk zekere primaire, in de menselijke geest ingeplante zaden van waarheid krachtig gedijden - zaden die in ons zijn verstikt, doordat we voortdurend allerlei soorten dwalingen hebben gelezen en gehoord. Dus hetzelfde licht van de geest dat hen in staat stelde om in te zien (zij het zonder te weten waarom) dat deugd te verkiezen is boven genot, dat het goede te verkiezen is boven het nuttige, stelde hen ook in staat om ware ideeën te vatten ten aanzien van filosofie en wiskunde, hoewel ze nog niet in staat waren om zulke wetenschappen volledig te beheersen. Men kan volgens mij inderdaad enige sporen zien van deze ware wiskunde bij Pappus en Diophantus² die, hoewel niet uit de vroegste oudheid, vele eeuwen voor onze tijd leefden. Maar ik heb de gedachte gekregen dat deze schrijvers zelf vanuit een soort verderfelijke sluwheid later deze wiskunde onderdrukten, zoals opvallend genoeg, naar bekend is, vele uitvinders hebben gedaan ten aanzien van hun ontdekkingen. Zij kunnen hebben gevreesd dat de methode, juist omdat zij zo eenvoudig en simpel was, als zij werd onthuld, ondergewaardeerd zou worden; dus om onze bewondering te verwerven, kunnen zij ons wellicht sommige kale,

¹ Wellicht een verwijzing naar mechanische apparaten als de houten duif van Archytas uit Tarente, een constructie die, naar het schijnt, echt kon vliegen.

² Griekse wiskundigen die werkzaam waren in Alexandrië in de derde eeuw v. Chr.

In feite is dát het wat ik voornamelijk beoogd heb te bereiken in deze verhandeling. Ik zou de Regels niet zo hogelijk waarderen als ze alleen goed waren om die onbeduidende problemen op te lossen waarmee rekenkundigen en meetkundigen geneigd zijn hun tijd te verdoen, want in dat geval zouden alle resultaten waarop ik zou kunnen bogen, neerkomen op een geploeter in onbenulligheden met een grotere subtiliteit dan zij. Ik zal veel te zeggen hebben over figuren en getallen, want geen andere discipline kan zulke evidente en zekere voorbeelden opleveren als zij. Maar wanneer men goed let op mijn bedoeling, zal men gemakkelijk inzien dat gewone wiskunde ver afstaat van hetgeen ik hier voor ogen heb; dat het een heel andere discipline is die ik uiteenzet, en dat deze voorbeelden meer haar uiterlijke gewaden zijn dan haar innerlijke onderdelen. Deze discipline zou de eerste beginselen van het menselijk verstand moeten bevatten en zich moeten uitstrekken tot het ontdekken van waarheden op welk gebied dan ook. Eerlijk gezegd ben ik ervan overtuigd dat het een machtiger instrument van kennis is dan elk ander waarmee mensen begiftigd zijn, aangezien het de bron is van al de overige. Ik heb gesproken van haar 'uiterlijk gewaad', niet omdat ik deze wetenschap wil verbergen en verhullen voor de blik van het publiek; ik wil haar juist aankleden en versieren, zodat het gemakkelijker is om zich van haar een beeld te vormen in de menselijke geest.

Toen ik voor het eerst mijn geest op de mathematische disciplines richtte, las ik onmiddellijk het meeste van de gangbare kennis die wiskundige schrijvers ons hebben overgeleverd. Ik besteedde bijzondere aandacht aan rekenkunde en meetkunde, want van deze zei men dat ze het eenvoudigst waren en dat ze als het ware een inleiding waren voor de overige. Maar in geen van beide onderwerpen kwam ik schrijvers tegen die me volledig bevredigden. Ik las veel over getallen waarvan ik de waarheid inzag toen ik eenmaal de berekeningen zelf had nagetrokken. De schrijvers brachten vele meetkundige waarheden als het ware dicht onder mijn ogen en leidden ze af door middel van logische argumenten. Maar ze bleken voor mijn geest niet voldoende duidelijk te maken waarom deze dingen zo zouden moeten zijn en hoe ze waren ontdekt. Dus was ik er niet verbaasd over dat zelfs vele slimme en geleerde mensen, nadat ze zich in deze kunsten hadden begeven ófwel ze snel terzijde legden als kinderachtig en onbeduidend, ófwel ze zo moeilijk en ingewikkeld achtten dat ze er van meetaf aan vanaf zagen om ze te leren. Want er is werkelijk niets nuttelozer dan zijn energie te besteden aan die oppervlakkige bewijzen die meer ontdekt zijn door toeval dan door methode en die meer te maken hebben met onze ogen en verbeelding dan met ons verstand; want het resultaat hiervan is dat we op de een of andere manier de gewoonte verliezen om

Een belangrijke vertegenwoordiger van het meer uiterlijk mathematische kunnen we zien in *René Descartes* (1596-1650). Van alle wetenschappen was Descartes het meest onder de indruk van de wiskunde. Wel was hij van mening dat de in zijn tijd gangbare wiskunde aan strengheid en duidelijkheid te wensen overliet. Het leek hem mogelijk om een meer algemene wiskunde op te zetten, een - zoals hij dat zelf noemde - *mathesis universalis*, die als grondslag kon dienen voor wetenschap in het algemeen. Descartes had ook kritiek op de zijns inziens gebrekkige toepassing van wiskunde op de problemen van de fysica. Van groot belang voor zowel de ontwikkeling van de wiskunde als die van de natuurwetenschap was zijn ontdekking van de *analytische meetkunde*. Hierin wordt de ruimte via een coördinatenstelsel getalsmatig bepaalbaar gemaakt. Daardoor kan algebra worden ingezet voor meetkundige problemen, die op hun beurt model kunnen staan voor bijvoorbeeld natuurkundige problemen. Descartes was zeer geïnteresseerd in de toepassingsmogelijkheden van de wiskunde binnen de natuurwetenschap. Zijn opvatting van de uiterlijke werkelijkheid is uitgesproken geometrisch: de dingen om ons heen zijn *res extensae*, oftewel dingen die gekenmerkt worden door uitgebreidheid. Binnen deze fysieke ruimte heersen strenge mechanische wetmatigheden: het verloop der dingen voldoet aan wiskundig bepaalde bewegingswetten. Descartes gaat in deze denkwijze zover dat hij het planten- en dierenrijk geheel aan dit bewegingsregime ondergeschikt acht. Zelfs een dier is in zijn zienswijze niet meer dan een ingewikkelde automaat. Alleen voor de mens maakt Descartes een uitzondering, omdat in de mens ook een geestelijk principe werkzaam is.

Descartes was niet alleen gegrepen door de toepasbaarheid van de wiskunde, maar zijn mathematische is ook af te lezen aan zijn stijl van filosoferen als geheel. Dit komt tot uitdrukking in het belang dat hij hecht aan een betrouwbare *methode* voor wetenschap. De methode die Descartes aanbeveelt, is wiskundig van opzet: begin met kennis die evident is, dat wil zeggen onmiddellijk inzichtelijk, en bouw hier op voort met logische middelen. Via intuïtie en deductie kan men zich een weg banen naar algemeen geldige kennis.

Het is veelbetekenend dat Descartes in zijn filosofie als eerste fundamentele zekerheid, als basisintuïtie uitkomt op het onbetwifelbare bestaan van de mens als denkend wezen, in de woorden van Descartes: als *res cogitans*. Deze karakterisering van het wezen van de mens past in de context van de confrontatie van een wiskundige met zijn eigen denkactiviteit. Deze confrontatie betekent een ontmoeting van de denker met zichzelf, waarin hij tot *zelfbewustzijn* komt.

Voor het begrijpen van de werkelijkheid doet Descartes dus een beroep op twee verschillende substanties, namelijk denken en uitgebreidheid: één ter verklaring van hetgeen zich in de mens afspeelt en één ter verklaring van de wereld om hen heen. Dit metafysische standpunt wordt *dualisme* genoemd. Hiermee komt de mens als innerlijk wezen in een scherpe tegenstelling te staan tot de wereld om hem heen, hetgeen de vraag oproept naar hun samenhang. Deze vraag wordt door Descartes weliswaar gesteld, maar niet op bevredigende wijze opgelost. Zijn mathematisisme is voor het grootste deel uiterlijk georiënteerd.

Rudolf Steiners spreuk voor de tweeling

Rudolf Steiner heeft de euritmie een twaalfstal spreuken gegeven, die betrekking hebben op de *stemming* die eigen is aan de kosmische krachten van de dierenriem.¹ De uiterst geconcentreerde vorm en het diepzinnige gehalte van deze spreuken maken het begrijpen ervan bijzonder moeilijk. Hieronder volgt een interpretatie die poogt om iets van het wezenlijk gehalte van het mathematisisme in de spreuk die samenhangt met de tweeling terug te vinden. Deze invalshoek heeft uiteraard zijn beperkingen.

De aan de stemming van de tweeling gewijde spreuk luidt als volgt:

Erschliesse dich, Sonnesein,
Bewege den Ruhetrieb,
Umschliesse die Strebelust
Zu mächtigem Lebewalten,
Zu seligem Weltbegreifen,
Zu fruchtendem Werdereifen,
O Sonnesein, verharre!

1) *Zon-regel*: Erschliesse dich, Sonnesein,
 Ontsluit je, zonnezijn,

In de periode van de tweeling bereikt de natuur haar grootste ont-plooiing. De plantenwereld tooit zich met een overvloed van fijnzinnig gevormde bloemen als het stralend bewijs van ontsloten zonnekrachten.

¹ *De twaalf stemmingen* (GA 261, ook in GA 40); het begrip stem-ming moet hier duidelijk worden onderscheiden van dat van de wereldbeschouwingsstemming: de wereldbeschouwingsstemmingen worden juist in samenhang met de zeven planeetsferen gebracht en niet met de twaalf dierenriembeelden.

fout zijn vervallen¹. Maar als onze methode goed uitlegt hoe we onze geestelijke intuïtie moeten gebruiken om te voorkomen dat we de tegen-overgestelde fout maken, en hoe we te werk moeten gaan om de deductie-ve gevolgtrekkingen te vinden die ons zullen helpen om tot een allesomvat-tende kennis te komen, dan zie ik niet wat er verder nog nodig is om haar volledig te maken; want, zoals ik al eerder zei, we kunnen geen kennis hebben zonder geestelijke intuïtie of deductie. De methode kan niet zover gaan dat zij ons leert hoe de feitelijke verrichtingen van intuïtie en deduc-tie uitgevoerd moeten worden, aangezien deze de meest eenvoudige zijn van alle en zeer fundamenteel zijn. Als ons verstand al niet in staat was om ze te verrichten, dan zou het niets kunnen begrijpen van de regels van de methode, hoe gemakkelijk ze ook mogen zijn. De andere geestelijke verrichtingen die volgens de dialectiek geleid kunnen worden met behulp van de reeds eerder genoemde, zijn hier niet van belang, of sterker nog, ze moeten worden gezien als een echte hindernis, want niets kan worden toegevoegd aan het heldere licht van het verstand dat dit niet op enige wijze verduistert.

Deze methode is zo nuttig dat ik denk dat zonder haar de bezigheid van het leren meer schadelijk dan voordelig is. Vandaar dat ik allicht geloof dat de grote geesten van het verleden er tot op zekere hoogte bewust van waren, al was het alleen maar de natuur die hen ertoe leidde. Want de menselijke geest heeft een soort vonk van het goddelijke in zich, waarin de eerste zaden zijn gezaaid van bruikbare wijzen van denken, zaden die, hoe verwaarloosd en verstikt ook door studies die hen belemmeren, vaak vanuit zichzelf vruchten afwerpen. Dit is onze ervaring in de eenvoudigste wetenschappen: rekenkunde en meetkunde: we zijn ons er terdege van bewust dat de meetkundigen van de oudheid een soort analyse toepasten die ze bleven gebruiken voor de oplossing van ieder probleem, hoewel ze er niet toe genegen waren deze te onthullen aan het nageslacht. In deze tijd bloeit een soort rekenkunde die 'algebra' wordt genoemd, en deze bereikt voor getallen wat de ouden voor figuren deden. Deze twee disciplines zijn eenvoudig de spontane vruchten die zijn voortgekomen uit de aangeboren principes van deze methode. Ik sta er niet verbaasd over dat, waar het de eenvoudigste objecten van deze discipline betreft, er een rijkere oogst is van vruchten dan in andere disciplines, waarin grotere obstakels vooruit-gang dreigen te verstikken. Maar zonder twijfel kunnen ook deze een volmaakte rijpheid bereiken als ze maar met uiterste zorg behandeld worden.

¹ Kennelijk wordt bedoeld: het verwerpen van iets wat waar is op grond van een misplaatst scepticisme.

zaken dan zij die al hun tijd in de Scholen hebben doorgebracht. Onder een 'methode' versta ik betrouwbare regels die gemakkelijk zijn toe te passen en zodanig zijn dat men, mits exact toegepast, nooit iets dat onwaar is voor waar zal houden of zich vruchteloos geestelijk zal inspannen; maar geleidelijk en voortdurend zal de kennis toenemen tot men een waar begrip heeft bereikt van alles wat binnen iemands vermogen ligt.



René Descartes (1596-1650)
kopergravure van Frans van Schooten (1642)

Er zijn hier twee punten die we moeten onthouden: we moeten nooit iets voor waar aannemen wat onwaar is; en ons doel moet zijn om kennis te bereiken van alle dingen. Want als we iets niet weten wat we wel kunnen weten, dan komt dit eenvoudig omdat we nooit een weg hebben ontdekt die ons naar die kennis kan leiden, of omdat we in de tegenovergestelde

Als pendant hiervan kan de mens zich in zijn zieleleven openstellen voor de verlichtende wereld van de mathematica.

- 2) *Venus-regel:* Bewege den Ruhetrieb,
Beweeg de drang tot rusten,

De onstuimige groeikrachten van het voorjaar komen enigszins tot bedaren. Nadat de planten zich te buiten zijn gegaan in kleur en geur en het spel van de wind en de insecten tot bevruchting heeft geleid, breekt een nieuwe fase aan: één van rusten en rijpen. In het innerlijk van de mens komt het denken tot rust in vastomlijnde begrippen en ideeën. Vooral bij wiskundige begrippen is sprake van in zichzelf rustende gegevenheden met een duidelijke bepaaldheid.

- 3) *Mercurius-regel:* Umschliesse die Strebelust
Omsluit de lust tot streven

Er worden grenzen gesteld aan de stuwkracht van het leven. De plant bereikt uiterlijk een zekere vaste vorm. Tevens vindt er een concentratie van levenskrachten plaats in de zaadvorming. In het denken van de mens wordt de vaste vorm van begrippen en ideeën bepaald.

- 4) *Mars-regel:* Zu mächtigem Lebewalten,
Tot machtig heersend leven,

De levende natuur bereikt zo haar hoogtepunt wat betreft het machtig vertoon van groei- en vormkrachten.

- 5) *Jupiter-regel:* Zu seligem Weltbegreifen,
Tot zalig wereld-begrijpen,

Met de gevormde begrippen kan de mens de wereld begrijpen, hetgeen hem een diepe voldoening kan geven: hij verlangt hier sterk naar.

- 6) *Saturnus-regel:* Zu fruchtendem Werdereifen,
Tot vruchtbaar wordingsrijpen,

Nadat de plant haar grootste uitbreiding heeft ondergaan, waarbij haar nieuwe ruimtelijke grenzen zijn bepaald, breekt voor haar de fase van de vruchtvorming aan. Ook in het denken kunnen de nieuw eigengemaakte begrippen tot vruchtbare toepassingen leiden.

7) *Maan-regel*:

O Sonnesein, verharre!
O zonnezijn, duur voort!

Moge de opbouwende, vernieuwende, verfrissende levenskrachten voortduren en niet verloren gaan, ondanks het feit dat hun uiterlijke missie voorlopig nagenoeg voltooid is! Moge de lichtende en vormende kracht van de geest ook blijvend vertegenwoordigd zijn in het innerlijk van de mens!

Regel vier uit:
«Regels om richting te geven aan de geest»
van René Descartes

Voor René Descartes (1596-1650) was de mathematica een voor het denken toonaangevende discipline, zij het in een betekenis die de traditionele wiskunde te boven gaat. In onderstaande fragment, dat afkomstig is uit het onvoltooid gebleven en tijdens zijn leven niet gepubliceerde «Regulae ad directionem ingenii» - vermoedelijk ontstaan in 1628 - beschrijft Descartes het belang en de aard van een 'mathesis universalis', een universele mathematica, een mathematica die algemener en omvattender is dan de gewone wiskunde. Hiermee willen we het denken van een vertegenwoordiger van het mathematisme illustreren.¹

Regel Vier

We hebben een methode nodig om de waarheid der dingen te onderzoeken.

De nieuwsgierigheid waarmee sterfelijken behept zijn, is zo blind dat ze vaak hun geest langs onbetreden paden stuurt, vanuit de ongegronde hoop dat ze toevallig op datgene stuiten wat ze zoeken, eigenlijk zoals iemand die zó bezeten is van een zinloos verlangen een schat te ontdekken, dat hij voortdurend de straten afzoekt om te zien of hij iets kan vinden wat een voorbijganger wellicht heeft laten vallen. Zo wordt het onderzoek geleid van bijna iedere chemicus, van de meeste meetkundigen en van vele filosofen. Ik ontken niet dat ze soms gelukkig genoeg zijn om op hun zwerftochten op een waarheid te stuiten, hoewel ik hen wat dat betreft meer gelukkig acht dan nauwgezet. Maar het is veel beter om de waarheid op enig gebied te onderzoeken zonder enige beschouwing dan dat te doen zonder een methode. Want zeer zeker zullen zulke op toeval gebaseerde onderzoeken en duistere overdenkingen het natuurlijke licht verduisteren en ons verstand verblinden. Zij die gewend zijn om in het donker te lopen, verzwakken hun gezichtsvermogen met als resultaat dat ze niet langer het volle daglicht kunnen verdragen. De ervaring bevestigt dit, want we merken vaak dat mensen die nooit hun tijd hebben besteed aan geleerde studies tot gezonder en helderder oordelen komen over voorkomende

¹ Vertaald vanuit: «*The Philosophical Writings of Descartes*», Volume 1, Cambridge University Press 1985; vertaler: J. van der Schuit.